Un impresario edile decide di costruire un villaggio residenziale composto da n palazzine, la cui altezza può variare nell'insieme $\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$. Il costo di costruzione di una palazzina dipende dalla sua altezza: vale c_j nel caso di una palazzina di altezza h_j, $j = 1, \ldots, k$. In base alle normative urbanistiche vigenti, il dislivello tra la palazzina più alta e quella più bassa non deve eccedere una soglia data ϵ.

Sapendo che la palazzina i, se costruita di altezza h_j, potrà ospitare a_{ij} famiglie, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, si formuli in termini di P.L.I. il problema di costruire a costo minimo il quartiere in modo che esso sia in grado di ospitare almeno δ famiglie.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti nk variabili logiche:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se viene scelta l'altezza } h_j \text{ per costruire la palazzina } i, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Introduciamo quindi n variabili a valori discreti, x_i, per indicare l'altezza scelta per la palazzina i, $i = 1, \ldots, n$. Tali variabili sono definite nel seguente modo:

$$x_i = \sum_{j=1}^{k} h_j y_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

con

$$\sum_{j=1}^{k} y_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Introduciamo ora due variabili ausiliarie, w e z, per stimare, rispettivamente per difetto e per eccesso, l'altezza minima e l'altezza massima scelta dall'impresario per le palazzine. Tali variabili ausiliarie devono rispettare i seguenti vincoli:

$$w \le x_i \le z, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Il vincolo di equilibrio urbanistico è allora esprimibile mediante: $z - w \le \epsilon$.

Il vincolo relativo alle famiglie da ospitare può invece essere espresso mediante: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_{ij} \ge \delta$.

La funzione obiettivo, da minimizzare, è data dal costo totale di costruzione: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} c_j y_{ij}$.

La formulazione del problema è quindi

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} c_j y_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} h_j y_{ij} - x_i &= 0 && i = 1, \ldots, n \\
\sum_{j=1}^{k} y_{ij} &= 1 && i = 1, \ldots, n \\
x_i - w &\ge 0 && i = 1, \ldots, n \\
x_i - z &\le 0 && i = 1, \ldots, n \\
z - w &\le \epsilon && \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_{ij} &\ge \delta && \\
y_{ij} &\in \{0, 1\} && i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, k
\end{aligned}$$