Verificare se la base $B = \{1,2\}$ è primale ammissibile per il seguente problema e, in caso negativo, determinare una base primale ammissibile a partire da B:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & & & x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
 & & & x_2 & \leq & 3
\end{array}
$$

SVOLGIMENTO

$$
A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

$$
A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = b_N
$$

Quindi B non è primale ammissibile in quanto $A_3 \bar{x} > b_3$.

Scriviamo il problema primale ausiliario per $J = \{3\},\ H = \{4,5,6\}$:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{(PA)} \max & & & & - & \nu & & \\
 & x_1 & & & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & & & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & - & \nu & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 6 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & & & & - & \nu & \leq & 0
\end{array}
$$

Applichiamo l'algoritmo del simplesso primale a partire dalla base $\mathcal{B}_1 = B \cup J = \{1,2,3\}$.

it.1) $\mathcal{B}_1 = \{1,2,3\}$

$$
\mathcal{A}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ \mathcal{A}_{\mathcal{B}_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ z_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} x_{\mathcal{B}_1} \\ \nu_{\mathcal{B}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
y_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ y^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ h = 1,\ \mathcal{B}_1(h) = 1,
$$

$$
\xi^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathcal{A}_{\mathcal{N}_1} \xi^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \bar{\lambda} = \lambda_7 = 1,\ k = 7.
$$

it.2) $\mathcal{B}_2 = \{7,2,3\}$

$$
\mathcal{A}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix},\ \mathcal{A}_{\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ z_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} x_{\mathcal{B}_2} \\ \nu_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
y_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ y^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \text{STOP}
$$

Quindi $x_{\mathcal{B}_2}$ è una soluzione di base primale ammissibile e $B_1 = \{2,3\}$ è la corrispondente base.