Soluzione esercizio 3.3.5.

Il problema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

ponendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad c = [1, 3].$$

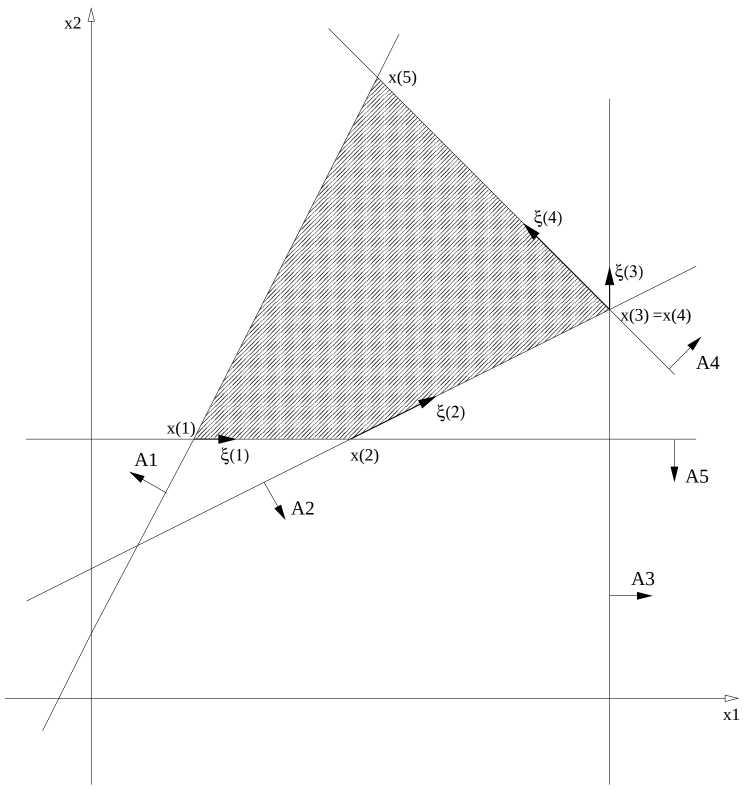


Figura 1: regione ammissibile e vincoli

Possiamo applicare l'algoritmo del simplesso primale, partendo dalla base $B^{(1)} = \{1, 5\}$ che è primale ammissibile, come risulta anche dalla figura.

I^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

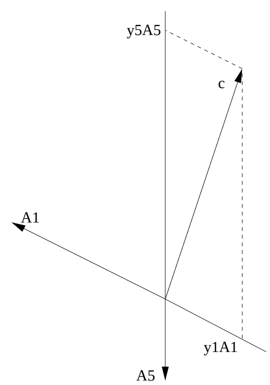
La soluzione di base primale risulta essere

$$\bar{x}^{(1)} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamone, anche formalmente, l'ammissibilità:

$$b_N - A_N \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 13/2 \\ 17/2 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di base duale risulta essere non ammissibile; infatti, la figura mostra che c non può essere espresso come combinazione lineare a coefficienti non negativi di A_1 ed A_5.



Poiché risulta sia $y_1 < 0$ che $y_5 < 0$, l'indice uscente dalla base sarà 1 in virtù della regola anticiclo di Bland. Formalmente:

$$\bar{y}_B^{(1)} = (\bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_5^{(1)}) := c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -7/2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(1)} = (\bar{y}_2^{(1)}, \bar{y}_3^{(1)}, \bar{y}_4^{(1)}) = (0, 0, 0),$$
$$h^{(1)} = 1 \quad (B(h^{(1)}) = 1).$$

Possiamo individuare anche l'indice entrante nella base con considerazioni geometriche; dalla figura 1 risulta che gli indici candidati sono 2, 3 e 4 ma soltanto la base $\{2, 5\}$ è ammissibile. Quindi l'indice entrante deve essere 2. Formalmente:

$$\xi^{(1)} := -A_B^{-1} u_{B(h^{(1)})} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N\bar{\xi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{(1)} := \min\{(b_i - A_i\bar{x})/A_i\bar{\xi} \ : \ i \in N,\ A_i\bar{\xi} > 0\} = \min\{5, 13, 17\} = 5,$$

$$k^{(1)} = 2.$$

La nuova base è perciò

$$B^{(2)} = B^{(1)} \setminus \{1\} \cup \{2\} = \{2, 5\}.$$

Si osservi che la direzione di crescita della funzione obiettivo data da $\bar{\xi}^{(1)}$ individua anche uno spigolo del poliedro, la cui equazione è $\bar{x}^{(1)} + \lambda\bar{\xi}^{(1)}$ nella variabile λ; inoltre, $\theta^{(1)}$ determina la lunghezza del massimo spostamento lungo questo spigolo, che permette di mantenere l'ammissibilità.

II^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

La nuova soluzione di base primale risulta essere

$$\bar{x}^{(2)} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

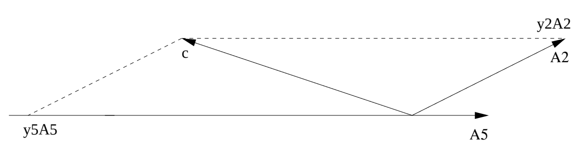
Poiché $\bar{\xi}^{(1)}$ individua lo spigolo del poliedro che congiunge i vertici adiacenti $\bar{x}^{(1)}$ e $\bar{x}^{(2)}$ ed inoltre $\theta^{(1)}$ rappresenta la lunghezza dello spostamento lungo $\bar{\xi}^{(1)}$ per raggiungere $\bar{x}^{(2)}$ a partire da $\bar{x}^{(1)}$, possiamo determinare $\bar{x}^{(2)}$ anche nel modo seguente:

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \theta^{(1)}\bar{\xi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Come ulteriore riprova dei conti svolti, verifichiamone anche l'ammissibilità:

$$b_N - A_N\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di base duale risulta essere non ammissibile, come mostra la seguente figura (ruotata di novanta gradi rispetto alle altre).



Essendo $y_1 > 0$ e $y_5 < 0$, l'indice uscente è sicuramente 5. Formalmente:

$$\bar{y}_B^{(2)} = (\bar{y}_2^{(2)}, \bar{y}_5^{(2)}) := cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(2)} = (\bar{y}_1^{(2)}, \bar{y}_3^{(2)}, \bar{y}_4^{(2)}) = (0, 0, 0),$$

$$h^{(2)} = 5 \quad (B(h^{(2)}) = 2).$$

Dalla figura 1 si deduce che i candidati indici entranti sono 3 e 4 ed inoltre le basi $\{2, 3\}$ e $\{2, 4\}$ sono entrambe ammissibili; poiché le due basi individuano lo stesso vertice, per la regola anticiclo l'indice entrante sarà 3. Si osservi che l'indice 1 non può essere candidato ad entrare nella base sia perché la base $\{1, 2\}$ non è ammissibile sia perché la direzione che congiunge $\bar{x}^{(2)}$ con la soluzione primale associata ad $\{1, 2\}$ non è di crescita per la funzione obiettivo. Formalmente:

$$\xi^{(2)} := -A_B^{-1} u_{B(h^{(2)})} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{\xi}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{(1)} := \min\{(b_i - A_i \bar{x}) / A_i \bar{\xi} \ : \ i \in N, \ A_i \bar{\xi} > 0\} = \min\{2, 2\} = 2,$$

$$k^{(2)} = 3.$$

La nuova base è perciò

$$B^{(3)} = B^{(2)} \setminus \{5\} \cup \{3\} = \{2, 3\}.$$

III^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

La nuova soluzione di base primale risulta essere

$$\bar{x}^{(3)} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

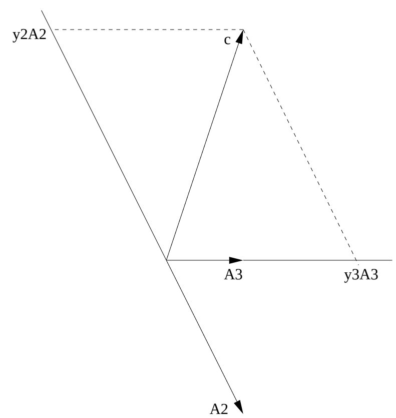
Come riprova, utilizzando l'altro metodo si ottiene

$$\bar{x}^{(3)} = \bar{x}^{(2)} + \theta^{(2)} \bar{\xi}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamone l'ammissibilità:

$$b_N - A_N\bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Poiché $A_4\bar{x}^{(3)} = b_4$, la soluzione di base è degenere, come evidente anche dalla figura 1.
La nuova soluzione di base duale risulta essere non ammissibile, come mostra la seguente figura.



Essendo $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$, l'indice uscente è sicuramente 2. Formalmente:

$$\bar{y}_B^{(3)} = (\bar{y}_2^{(3)}, \bar{y}_3^{(3)}) := cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 5/2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(3)} = (\bar{y}_1^{(3)}, \bar{y}_4^{(3)}, \bar{y}_5^{(3)}) = (0, 0, 0),$$

$$h^{(3)} = 2 \quad (B(h^{(3)}) = 1).$$

Dalla figura 1 si deduce che l'unico candidato indice entrante è 4. Formalmente:

$$\xi^{(3)} := -A_B^{-1} u_{B(h^{(3)})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

$$A_N\bar{\xi}^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{(3)} := \min\{(b_i - A_i\bar{x})/A_i\bar{\xi} \ : \ i \in N, \ A_i\bar{\xi} > 0\} = \min\{22, 0\} = 0,$$

$$k^{(3)} = 4.$$

La nuova base è perciò

$$B^{(4)} = B^{(3)} \setminus \{2\} \cup \{4\} = \{3, 4\}.$$

IV^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

La nuova soluzione di base primale risulta essere

$$\bar{x}^{(4)} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

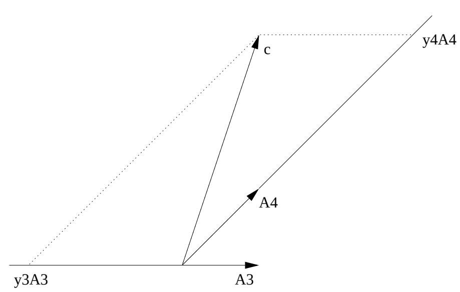
Abbiamo effettuato un cambio di base degenere, infatti la nuova soluzione coincide con la precedente; utilizzando l'altro metodo di calcolo, questo è ancora più evidente: essendo $\theta^{(3)} = 0$, non ci siamo spostati dal vertice in cui eravamo già arrivati.

$$\bar{x}^{(4)} = \bar{x}^{(3)} + \theta^{(3)} \bar{\xi}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La degenericità della soluzione di base trovata è ulteriormente evidenziata, verificandone l'ammissibilità:

$$b_N - A_N \bar{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

La nuova soluzione di base duale (si osservi che contrariamente a quella primale è diversa dalla precedente) risulta essere non ammissibile, come mostra la seguente figura.



Essendo $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$, l'indice uscente è sicuramente 3. Formalmente:

$$\bar{y}_B^{(4)} = (\bar{y}_3^{(4)}, \bar{y}_4^{(4)}) := cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(4)} = (\bar{y}_1^{(4)}, \bar{y}_2^{(4)}, \bar{y}_5^{(4)}) = (0, 0, 0),$$

$$h^{(4)} = 3 \quad (B(h^{(4)}) = 1).$$

Dalla figura 1 si deduce che l'unico candidato indice entrante è 1 (l'indice 3 non può essere candidato in quanto uscente). Formalmente:

$$\xi^{(4)} := -A_B^{-1} u_{B(h^{(4)})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_N\bar{\xi}^{(4)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{(4)} := \min\{(b_i - A_i\bar{x})/A_i\bar{\xi} \ : \ i \in N, \ A_i\bar{\xi} > 0\} = 11/3,$$

$$k^{(4)} = 1.$$

La nuova base è perciò

$$B^{(5)} = B^{(4)} \setminus \{2\} \cup \{1\} = \{1, 4\}.$$

V^o passo)

$$A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad b_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

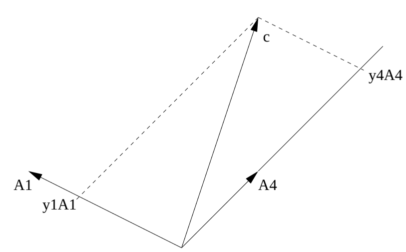
La nuova soluzione di base primale risulta essere

$$\bar{x}^{(5)} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/3 \\ 29/3 \end{bmatrix}.$$

Come riprova, utilizzando l'altro metodo si ottiene

$$\bar{x}^{(5)} = \bar{x}^{(4)} + \theta^{(4)}\bar{\xi}^{(4)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} + (11/3) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/3 \\ 29/3 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di base duale risulta essere ammissibile, come mostra la seguente figura.



Formalmente:

$$\bar{y}_B^{(5)} = (\bar{y}_1^{(5)}, \bar{y}_4^{(5)}) := cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 7/3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_N^{(5)} = (\bar{y}_2^{(5)}, \bar{y}_3^{(5)}, \bar{y}_5^{(5)}) = (0, 0, 0).$$

L'algoritmo quindi termina e $\bar{x} = [13/3, 29/3]$, $\bar{y} = [2/3, 0, 7/3, 0, 0]$ costituiscono la coppia di soluzioni (ottime) associata alla base ottima $B = \{1, 4\}$.