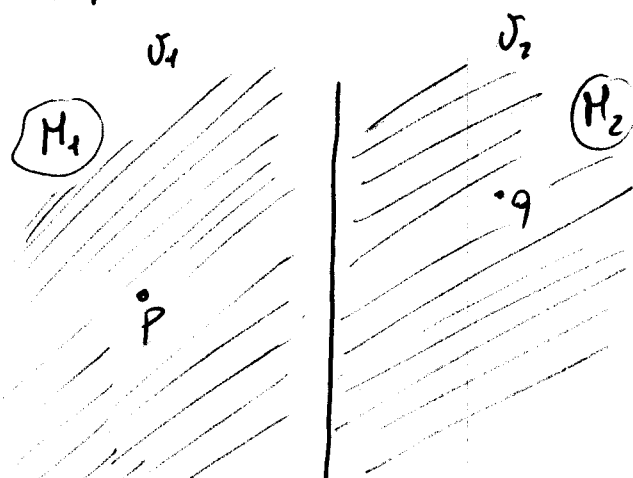


Esempi di ottimizzazione non vincolata

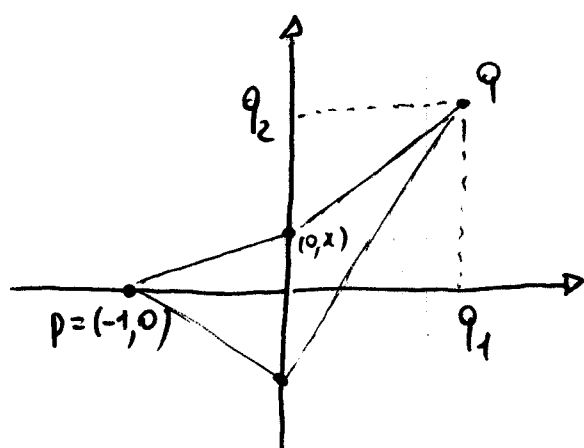
© 2010 GIACCARLO BILGI

1



Nel mezzo H_i ci si muove con velocità costante σ_i , $i=1,2$.
Individuare il tragitto più veloce da p a q .

Modellazione: scegliere assi cartesiani t.c. l'asse delle ordinate coincide con la superficie (retta) di separazione tra H_1 e H_2 e l'asse delle ascisse passi per p ; scegliere l'unità di misura in modo tale che $p = (-1, 0)$ e l'orientamento degli assi t.c. $q_2 > 0$



Nei mezzi omogenei i tragitti più veloci sono segmenti, quindi basta determinare dove il tragitto attraversa l'asse delle ordinate: $(0, x)$ con x incognito

Tempo di percorrenza:
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sigma_1} + \frac{\sqrt{q_1^2 + (q_2-x)^2}}{\sigma_2}$$

Il problema è quindi: $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

$$\nabla f(x) (= f'(x)) = \frac{x}{\sigma_1 \sqrt{1+x^2}} - \frac{q_2-x}{\sigma_2 \sqrt{q_1^2 + (q_2-x)^2}}$$

$$\nabla f(x) = 0 \iff \boxed{\sigma_2 x \sqrt{q_1^2 + (q_2-x)^2} - \sigma_1 (q_2-x) \sqrt{1+x^2} = 0} \quad (*)$$

equazione non lineare (in una variabile)

Es: f è convessa ($f(x) = \frac{1}{\sigma_1} \|p - (0, x)\|_2 + \frac{1}{\sigma_2} \|q - (0, x)\|_2 + 11 \cdot \frac{1}{2} f_2$ convessa)

L'equazione (*) può essere riscritta come
(nota che $x = q_2$ non risolve l'equazione)

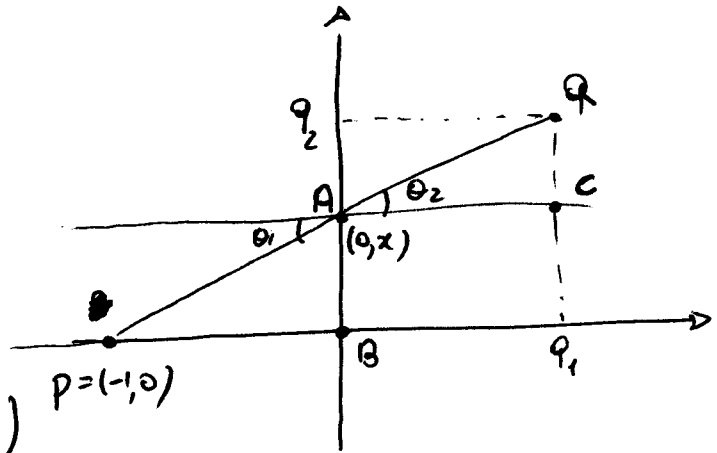
$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(\frac{\sqrt{q_1^2 + (q_2 - x)^2}}{q_2 - x} \right) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\sigma_1/\sigma_2 > 0 \Rightarrow x/(q_2 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < q_2$$

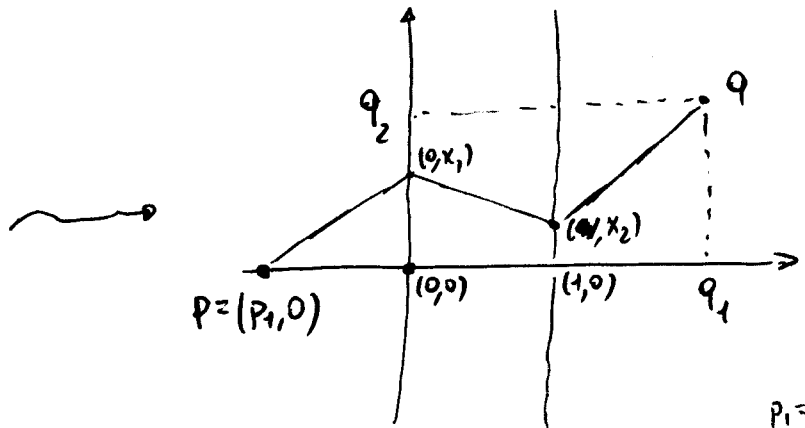
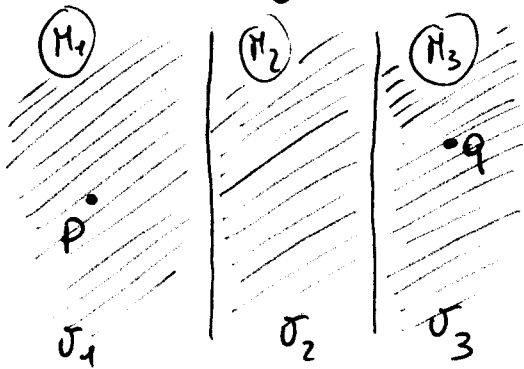
$$\underbrace{\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{PA}} \right)}_{\sin \theta_2} \underbrace{\left(\frac{\overline{AR}}{\overline{RC}} \right)}_{1/\sin \theta_2} = \sigma_1/\sigma_2$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (\text{legge della rifrazione})$$

[Snell-Cartesio]



Problema analogo con 3 mezzi:



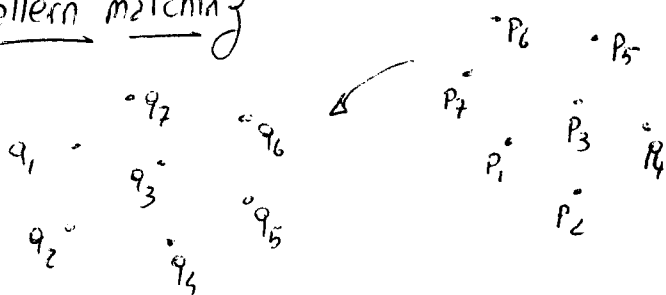
$$f(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{p_1^2 + x_1^2}}{\sigma_1} + \frac{\sqrt{1 + (x_2 - x_1)^2}}{\sigma_2} + \frac{\sqrt{(q_1 - 1)^2 + (q_2 - x_2)^2}}{\sigma_3}$$

(Es: f è convessa)

$$\nabla f(x) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sigma_1 \sqrt{p_1^2 + x_1^2}} - \frac{x_2 - x_1}{\sigma_2 \sqrt{1 + (x_2 - x_1)^2}} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_2 - x_1}{\sigma_2 \sqrt{1 + (x_2 - x_1)^2}} - \frac{x_2}{\sigma_3 \sqrt{(q_1 - 1)^2 + (q_2 - x_2)^2}} = 0 \end{cases}$$

Sistema di
2 equazioni
non lineari
(in 2 variabili)

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 \\ q_1 &= 2 \\ q_2 &= 1 \\ \sigma_1 &= 5, \sigma_2 = 1 \\ \sigma_3 &= 2 \end{aligned}$$

Point pattern matching $n=2$ 

Quanto sono "simili" i due insiemi di punti $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{R}^2$ e $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2$?

Applicazioni: visione e grafica computerizzata, astronautica (mappa stellari e posizione + orientazione di satelliti), biologia/chimica/farmacologia (allineamento di strutture proteiche, individuazione di frammenti molecolari con proprietà curative), registrazione di immagini, impronte digitali, penne calligrafiche

"similitudine" = rotazione + omotetia + traslazione

rotazione $\rightarrow A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$

omotetia $\rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$, traslazione $\rightarrow d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \ni p_i \mapsto \gamma A(\theta) p_i + d$$

Misura di quanto differiscono i due insiemi dopo la trasformazione per similitudine " θ, γ, d "

$$f(\gamma, \theta, d_1, d_2) = \min_{\delta \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^k \|\gamma A(\theta) p_{\delta(i)} + d - q_i\|_2^2, \quad \mathcal{P} = \{\text{permutazioni di } 1, 2, \dots, k\}$$

$$\min \{ f(\gamma, \theta, d_1, d_2) : \gamma, \theta, d_1, d_2 \in \mathbb{R} \}$$

$|\mathcal{P}| = k! \rightarrow$ il computo di f è oneroso; inoltre f può non essere differenziabile

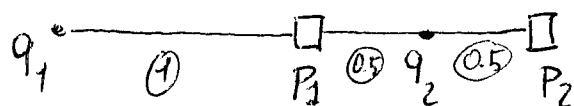
In alcune applicazioni l'unica numerazione ~~valida~~ dei punti valida per la similitudine è nota a priori e non è necessario considerare

le permutazioni $\rightarrow \hat{f}(\gamma, \theta, d_1, d_2) = \sum_{i=1}^k \|\gamma A(\theta) p_i + d - q_i\|_2^2$

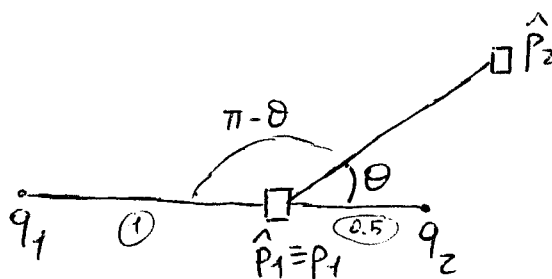
$\min \{ \hat{f}(\gamma, \theta, d_1, d_2) : \gamma, \theta, d_1, d_2 \in \mathbb{R} \}$ è un pb di MINIMI QUADRATI NONLINEARI

È possibile estendere il problema al caso di insiemi di cardinalità diversa

Esempio di f non differenziabile : $k=2$ $q_1 = (-1, 0)$, $q_2 = (1/2, 0)$, $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$



Consideriamo una rotazione di angolo θ
fissando quindi $\bar{q}=1$, $\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = 0$



$$\hat{p}_i = \bar{q} A(\theta) p_i + \bar{d} (= A(\theta) p_i)$$

Permutazione identica : $1 \rightarrow 1$
 $2 \rightarrow 2$ teo(Carnot)

$$\begin{aligned} \|\hat{p}_1 - q_1\|_2^2 &= 1 & \|\hat{p}_2 - q_2\|_2^2 &= \|\hat{p}_1 - q_2\|_2^2 + \|\hat{p}_1 - \hat{p}_2\|_2^2 - 2 \|\hat{p}_1 - q_2\|_2 \|\hat{p}_1 - \hat{p}_2\|_2 \cos \theta = \\ & & &= \frac{1}{4} + 1 - \cos \theta = \frac{5}{4} - \cos \theta \end{aligned}$$

minima associata alla permutazione : $\|\hat{p}_1 - q_1\|_2^2 + \|\hat{p}_2 - q_2\|_2^2 = \frac{9}{4} - \cos \theta$

Permutazione "inversione" : $1 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 1$

$$\|\hat{p}_2 - q_1\|_2^2 = 1 + 1 - 2 \cos(\pi - \theta) = 2 + 2 \cos \theta, \quad \|\hat{p}_1 - q_2\|_2^2 = \frac{1}{4}$$

teo(Carnot)

minima associata alla permutazione : $\|\hat{p}_2 - q_1\|_2^2 + \|\hat{p}_1 - q_2\|_2^2 = \frac{9}{4} + 2 \cos \theta$

Pertanto $f(\bar{q}, \theta, \bar{d}_1, \bar{d}_2) = \min \left\{ \frac{9}{4} - \cos \theta, \frac{9}{4} + 2 \cos \theta \right\} =: g(\theta)$

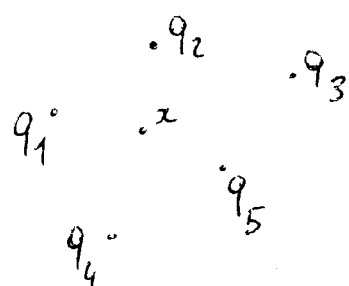
Siano $\bar{\theta} = \pi/2$ e $\bar{v} = (0, 1, 0, 0)$: non esiste $\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{q}, \bar{\theta}, \bar{d}_1, \bar{d}_2)$ in quanto g non è derivabile in $\pi/2$. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{q}, \bar{\theta}+t, \bar{d}_1, \bar{d}_2) - f(\bar{q}, \bar{\theta}, \bar{d}_1, \bar{d}_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(\bar{\theta}+t) - g(\bar{\theta})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos(\bar{\theta}+t)}{t} \stackrel{\text{H\^opital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} -2 \sin(\bar{\theta}+t) = -$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{q}, \bar{\theta}+t, \bar{d}_1, \bar{d}_2) - f(\bar{q}, \bar{\theta}, \bar{d}_1, \bar{d}_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{g(\bar{\theta}+t) - g(\bar{\theta})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\cos(\bar{\theta}+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \sin(\bar{\theta}+t) = 1$$

Localizzazione di servizi ("facility location")

Scegliere il luogo $x \in \mathbb{R}^n$ dove dislocare una "attività" che serve k luoghi $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{R}^n$ prefissati nel "miglior modo possibile" (ad esempio, la dislocazione di una antenna il cui segnale raggiunga i punti dati con la "migliore" intensità)



Applicazioni: logistica, selezione di parametri in statistica, errori di misurazione, disegno di reti

Possibili funzioni obiettivo da minimizzare:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^k \|q_i - x\|_2 \quad \text{pb di Weber} \quad (n=2, k=3 \rightarrow \text{punto di Fermat} \rightarrow \text{albero di Steiner})$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^k \|q_i - x\|_2^2 \quad \text{pb del centroide di } q_1, q_2, \dots, q_k$$

$$f_3(x) = \max \{ \|q_i - x\|_2^2 : i=1, \dots, k \} \quad \text{pb del centro di Chebyshev (centro della palla chiusa di raggio minimo che contiene tutti i punti } q_1, q_2, \dots, q_k)$$

f_1, f_2, f_3 sono funzioni convesse, ma

$x \mapsto \|q_i - x\|_2$ non è differenziabile in $x = q_i$ (e quindi f_1 non è differenziabile nei punti $q_1, q_2, \dots, q_k$)

f_3 può essere non differenziabile in quei punti $x \in \mathbb{R}^n$ per cui esistono $i \neq j$ tali che

$$\max_{i=1, \dots, k} \|q_i - x\|_2^2 = \|q_i - x\|_2^2 = \|q_j - x\|_2^2 \quad (\text{esempio: } n=1, \max \{x^2, (x-2)^2\} \text{ per } x=1)$$

Il problema del centroide può essere risolto esplicitamente:

$$\nabla f_2(x) = 2 \sum_{i=1}^k (q_i - x)$$

$$\nabla f_2(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k q_i \leftarrow \text{centroide}$$

Introduzione di "pesi" nella funzione obiettivo

$$\hat{f}_1(x) = \sum_{i=1}^K m_i \|q_i - x\|_2$$

$$m_i \geq 0$$

$$\hat{f}_2(x) = \sum_{i=1}^K m_i \|q_i - x\|_2^2$$

Applicazioni: in demografia, con m_i la popolazione del luogo i , per individuare il "centro di una popolazione"

$\hat{f}_1 \rightarrow$ "media geometrica" $\rightarrow$ punto di Fermat $\equiv$ punto/luogo di tempo aggregato di viaggio minimo

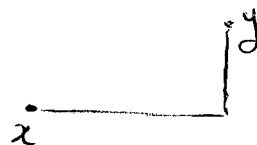
$\hat{f}_2 \rightarrow$ centroide: $\nabla \hat{f}_2(x) = 2 \sum_{i=1}^K m_i (q_i - x)$

$\nabla \hat{f}_2(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^K m_i} \sum_{i=1}^K m_i q_i$ (individua anche il centro di massa di K punti materiali i di massa m_i e coordinate q_i)

È possibile considerare norme diverse da quella euclidea, in particolare $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

che dà origine alla distanza "Manhattan" $d_H(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(che considera "spostamenti" ortogonali nel misurare la distanza)



Altri problemi di localizzazione contemplano la dislocazione di più "attività di servizio".