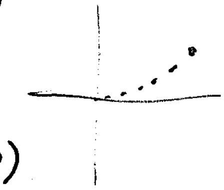
$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ $\quad$ successione

Es 0 $\quad x_k = (1/k, 1/k^2)$

$\downarrow$

$\bar{x} = (0,0)$



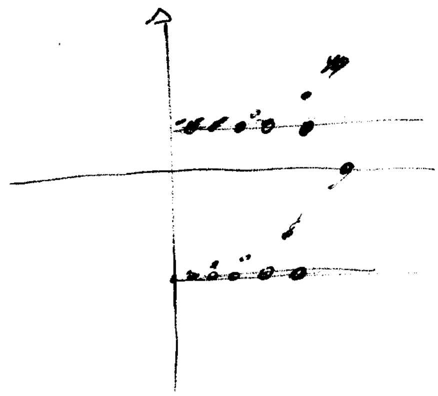
$\bar{x}$ limite di $\{x_k\}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$, $\quad x_n \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \bar{x}$ $\quad$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k}$ t.c. $\quad \|x_n - \bar{x}\|_2 \le \varepsilon$ per ogni $k \ge \bar{k}$

In tal caso $\{x_k\}$ si dice (successione) <u>convergente</u>

- Il limite, se esiste, è unico

Es 1 $\quad x_k = \left((-1)^k + 1/k , \quad \right)$



Il limite non esiste!

$\downarrow$

sottosuccessione

$x_1, x_3, x_5, x_7 \ldots\ldots \to (0,-1)$

$x_2, x_4, x_6, \ldots\ldots \to (0,1)$

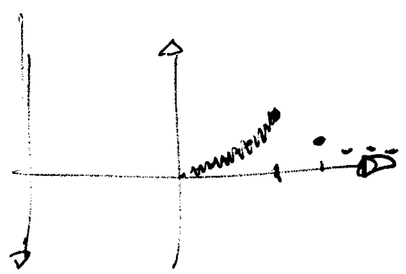
$\{x_{k_j}\}$ sottosuccessione di $\{x_k\}$

$(k_j = 2j-1, \quad k_j = 2j)$

Altro es: $\quad k_j = 3j$

$x_3, x_6, x_9, \ldots$ non converge

Es 2 $\quad x_k = \left(k \quad , 1/k \right)$



Non ammette sottosuccessioni convergenti.

Def $\bar{x}$ si dice punto di accumulazione di $\{x_k\}$ se $\exists$ sottosuccessione $\{x_{k_j}\}_j$ t.c. $x_{k_j} \xrightarrow[j]{} \bar{x}$

(limit or cluster point)

Teo (Bolzano-Weierstrass)

$\{x_k\}_k \quad \exists M > 0$ t.c. $\|x_k\|_2 \le M \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad \{x_k\}$ ammette una sottosuccessione convergente

(Es 1 $\to M = \sqrt{2}$)

INCIPIT $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\min \{ f(x) : x \in D \}$

Trovare $x^* \in \mathbb{R}^n$ tale che

- $x^* \in D$ (ammissibile)
- $f(x^*) \le f(x) \ \forall x \in D$ (punto di minimo)

$\mathbb{R}^n$ con $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ norma euclidea

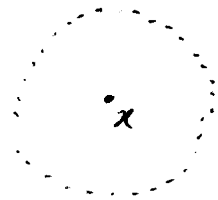
$\downarrow$

$d(x,y) = \|x-y\|_2$ distanza

(Eq: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \bar{k} \ge k$ t.c. $\|x^{\bar{k}} - \bar{x}\| \le \varepsilon$)

$x \in \mathbb{R}^n, \ \varepsilon > 0$

$B(x,\varepsilon) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 < \varepsilon \}$



Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se

$\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(x,\varepsilon) \subseteq A$

Def $x \in A$ è un punto interno di A se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(x,\varepsilon) \subseteq A$

A aperto $\equiv$ $A = \underbrace{\{\text{punti interni di } A\}}_{\text{parte interna}}$

int A

Esempi: $B(x,\varepsilon)$, $]-1,1[$, $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$

Proprietà

(i) A_α aperto $\Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha$ aperto

(ii) A_i aperto $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ aperto

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CHIUSO se

$\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto

Def $x \in A$ è un punto di chiusura di A se $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

A chiuso $\equiv$ $A = \underbrace{\{\text{punti di chiusura di } A\}}_{\text{chiusura di } A}$

$\bar{A}$, $cl(A)$

Proprietà

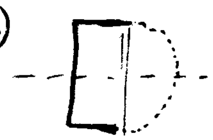
(i) A_i chiuso $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ chiuso

(ii) A_α chiuso $\Rightarrow \bigcap_\alpha A_\alpha$ chiuso

Prop $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso $\Leftrightarrow$ $\forall \{x_k\} \subseteq A$ t.c. $x_k \to \bar{x}$ risulta $\bar{x} \in A$

Esempi: $[-1,1]$, $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$, $\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_2 \leq \varepsilon \} = \overline{B(x,\varepsilon)}$

Esistono insiemi che non sono nè aperti nè chiusi:

* 

$([-1,0] \times [-1,1]) \cup B(\underline{0}, 1) = A$

$(-1-\varepsilon, 0) \in B((-1,0),\varepsilon) \ \forall \varepsilon \to A$ non è aperto

$x_k = (1 - 1/k, 0) \in A \quad x_k \to (1,0) \notin A \to A$ non è chiuso

(con $n=1$ $[-1,1[$)

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice LIMITATO se

$\exists M > 0$ t.c. $\|x\|_2 \leq M \quad \forall x \in A$.

$(A \subseteq \overline{B(0,M)})$

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice COMPATTO se

A è chiuso e limitato

L'esempio (*) fornisce A limitato ma non compatto.

$\overline{B(x,\varepsilon)}$ è compatto.

Teo (Bolzano-Weierstrass) Sia A compatto. Ogni successione contenuta in A ammette una sottosuccessione convergente: $\forall \{x_k\} \subseteq A \quad \exists \{x_{k_j}\}, \bar{x} \in A$ t.c. $x_{k_j} \xrightarrow[j]{} \bar{x}$.

(vedi Es1 e Es 2)

$A = [0,1] \times [-1,1]$

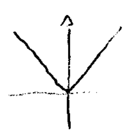
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (estendere dal caso $n=1$ i concetti di: – continuità – derivabilità e i relativi risultati)

Def f si dice CONTINUA in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $\|x - \bar{x}\|_2 \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

(f continua su $A \equiv$ continua in ogni $\bar{x} \in A$).

Prop f è continua in $\bar{x} \Leftrightarrow \forall \{x_k\}$ t.c. $x_k \to \bar{x}$ risulta $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(\bar{x})$.

Esempi: $f(x) = \|x\|_2$ ($n=1$ ) $\qquad f(x_1,x_2) = \sin(\pi x_1 x_2)$

Teo (Weierstrass) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua su A.
Allora f ammette massimo e minimo su A

dim $\ell := \inf \{ f(x) : x \in A \} \in [-\infty, +\infty)$. Sia $f(x_k) \to \ell$ con $x_k \in A$

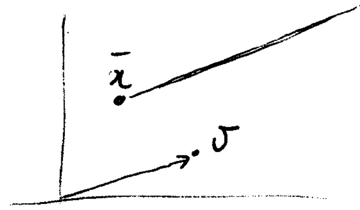
A compatto $\Rightarrow \exists \bar{x} \in A \ \exists x_{k_j} \to \bar{x}$; f continua $\Rightarrow f(x_{k_j}) \to f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) = \ell$

$\Rightarrow \ell \neq -\infty \Rightarrow f(\bar{x}) = \min \{ f(x) : x \in A \}$

Esempi: $n=1$ $f(x) = e^{-x}$, $A = \mathbb{R}_+$  ; $f(x) = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ $A = [0,1)$ 

Derivate direzionali

$v \in \mathbb{R}^n \quad \|v\|_2 = 1 \qquad \{\bar{x} + tv \mid t \geq 0\}$



$n=1 \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \to \quad \lim_{t\to 0} \underbrace{[f(\bar{x}+t) - f(\bar{x})]/t}_{\text{rapporto incrementale}}$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n: \quad [f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})]/t$

(Eq: $g(t) = [f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})]/t$ è derivabile in $t=0$)

f si dice DERIVABILE in $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ nella direzione v se $\exists \lim_{t\to 0^+} [f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})]/t$

$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) := \lim_{t\to 0^+} [f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})]/t$ si chiama DERIVATA $\underbrace{\text{DIREZIONALE}}_{\text{nella direzione } v}$

"one-sided directional derivative"

$t\to 0 \rightsquigarrow t\to 0^+$

$f'(\bar{x};v)$

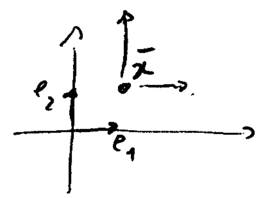
Esempio: $f(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

$\bar{x}=0 \quad [f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})]/t = \left(\sum_{i=1}^n t^2 v_i^2\right)^{1/2}/t = |t|\left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)^{1/2}/t = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)^{1/2} = \|v\|_2 = 1$

f è derivabile in $\bar{x}=0$ in ogni direzione e $\cancel{\frac{\partial f}{\partial v}}(\bar{x}) = \|v\|_2 = 1$ $\quad f'(\bar{x};v)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial v}$ non esiste!

Direzioni particolari: $e_i = (0,0,\dots,1,0,\dots 0)$

$\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x}) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ DERIVATE PARZIALI



Nota: $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0^+} [f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i+t,\bar{x}_{i+1},\dots \bar{x}_n) - f(\bar{x})]/t$

Esempio: $f(x_1,x_2) = \sin(\pi x_1 x_2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \pi x_2 \cos(\pi x_1 x_2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \pi x_1 \cos(\pi x_1 x_2)$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \pi x_2 \cos(\pi x_1 x_2) \\ \pi x_1 \cos(\pi x_1 x_2) \end{pmatrix}$

Def $\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\right)^T$ si dice GRADIENTE di f in $\bar{x}$

$n=2$

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\left(\dfrac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}\right)^2 & \text{se } (x_1,x_2)\neq(0,0)\\[2ex] ? & \text{se } (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

$\underset{x_1\neq 0}{x_2=\alpha x_1^2}$: $f(x_1,\alpha x_1^2)=\left[\alpha x_1^4/(x_1^4+\alpha^2x_1^4)\right]^2=\alpha^2/(1+\alpha^2)^2$

f non è continua in $\bar{x}=(0,0)$: $f(1/k,1/k^2)\equiv 1/4$, $f(1/k,2/k^2)\equiv 4/25$

f ammette derivate direzionali in $\bar{x}=(0,0)$ in ogni direzione (ponendo $f(0,0)=0$):

$$[f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})]/t=\left[\cancel{t^3}v_1^2v_2/\cancel{t^2}(t^2v_1^4+v_2^2)\right]^2/t=t\,v_1^4v_2^2/(t^2v_1^4+v_2^2)^2\xrightarrow[t\to 0]{}0$$

(nota $v_2=0\to$ rapp incr $\equiv 0$)

Differenza: $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ ϕ continua in $\bar{x}$

Def $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si dice DIFFERENZIABILE in $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ se esiste $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lineare ($L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$ $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$) tale che

$$f(\bar{x}+h)=f(\bar{x})+L(h)+r_{\bar{x}}(h)\quad\text{per ogni } h\in\mathbb{R}^n$$

con $r_{\bar{x}}(h)/\|h\|_2\longrightarrow 0$ per $\|h\|_2\to 0$ (eq: $[f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-L(h)]/\|h\|_2\to 0$)

(f differenziabile su $A\subseteq\mathbb{R}^n$ $\equiv$ differenziabile in ogni $\bar{x}\in A$)

L si dice differenziale di f in $\bar{x}$

Nota: $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lineare $\Leftrightarrow$ $\exists\,\ell\in\mathbb{R}^n$ t.c. $L(x)=\ell^Tx$ per ogni $x\in\mathbb{R}^n$

Prop f differenziabile in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ f continua in $\bar{x}$.

Prop f differenziabile in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ f ammette derivata in $\bar{x}$ in ogni direzione v

dim $$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{L(tv)+r_{\bar{x}}(tv)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{tL(v)+r_{\bar{x}}(tv)}{t}$$

$$= L(v) + \lim_{t\to 0}\frac{r_{\bar{x}}(tv)}{t} = L(v) \qquad \left(\|tv\|_2 = |t|, \text{ e } \frac{r_{\bar{x}}(tv)}{|t|} \to 0 \Rightarrow \frac{r_{\bar{x}}(tv)}{t}\to 0 \right) \quad \blacksquare$$

Oss $v \in \mathbb{R}^n$ $(\|v\|_2 = 1)$ $\qquad v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = L(v) = L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i L(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T v$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T v \qquad \rightarrow \underline{L(v) = \nabla f(\bar{x})^T v}$$

Nota: queste relazioni richiedono f differenziabile in $\bar{x}$.

Es: NONDIF

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1^2 x_2/(x_1^2+x_2^2) & \text{se } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

$\bar{x} = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3 v_1^2 v_2 / t^2(v_1^2+v_2^2)}{t} = v_1^2 v_2 \qquad (\text{poiché } \|v\|_2^2 = v_1^2+v_2^2 = 1)$$

In particolare $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = 0$ ma $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) \neq 0$ per ogni altra direzione

Quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) \neq \nabla f(\bar{x})^T v = 0$

Teorema (differenziale totale) Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale da ammettere derivate parziali in ogni $x \in B(\bar{x},\varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: B(\bar{x},\varepsilon)\to\mathbb{R} \text{ continue in } \bar{x} \Rightarrow f \text{ differenziabile in } \bar{x}$$

$$\left(x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

Nell'esempio NONDIFF

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2x_1x_2^3/[x_1^2+x_2^2]^2 \quad x \neq (0,0)$$

$0 \neq x_1 = x_2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \equiv 1/2$ mentre $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0$

Prop. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile in $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$.

Allora $\phi \circ f$ è differenziabile in $\bar{x}$ e $\nabla(\phi\circ f)(\bar{x}) = \phi'(f(\bar{x}))\, \nabla f(\bar{x})$.

Teorema (valor medio) Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ differenziabile con continuità (ovvero $\nabla f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \nabla f(x)$ è continua) su $\mathbb{R}^n$. Dati $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $h\in\mathbb{R}^n$, esiste $t\in(0,1)$ tale che

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \nabla f\underbrace{(\bar{x}+t h)}^{}{}^T h$$

$x+th$ appartiene al segmento di estremi x e $x+h$

(ricordare il caso $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $\phi(t_1) = \phi(t_0) + \phi'(\xi)(t_1-t_0)$ per un opportuno $\xi \in (t_1,t_0)$ (t_0,t_1))

FORMULA DI TAYLOR I° ORDINE

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ differenziabile

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T h + r_{\bar{x}}(h) \quad \text{con} \quad r_{\bar{x}}(h)/\|h\|_2 \xrightarrow[\|h\|_2\to 0]{} 0$$

(semplice riscrittura della definizione alla luce delle proprietà di pg ⑥).

(IPER)PIANO TANGENTE

$h = x-\bar{x}$, $h \approx 0 \to f(x) \approx f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})$

$\{(x, f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x})) \mid x\in\mathbb{R}^n\}$ equazione (iper)piano tangente al grafico di f nel punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

$\uparrow$

$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

Matrice Jacobiana $\quad F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \quad F=(f_1,\dots,f_m) \quad f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$JF(x) = \begin{bmatrix} - \nabla f_1(x)^T - \\ \vdots \\ - \nabla f_m(x)^T - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Derivate di ordine superiore

f differenziabile su $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\|_2 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione $\to$ ammette derivate nelle varie direzioni?

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x)$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}+tw) - \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})\right]/t$$

Limitiamoci alle derivate parziali: $w = e_i$, $v = e_j$ $\to$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

$i = j \rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Esempio di pg 4:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \pi x_2 \cos(\pi x_1 x_2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \pi x_1 \cos(\pi x_1 x_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) = \pi \cos(\pi x_1 x_2) - \pi^2 x_1 x_2 \sin(\pi x_1 x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = -\pi^2 x_2^2 \sin(\pi x_1 x_2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = -\pi^2 x_1^2 \sin(\pi x_1 x_2)$$

Teo (Schwartz / inversione ordine derivazione) Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$ esistano in ogni $x \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$ e siano continue in $\bar{x}$.

Allora $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$.

Def

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})\right\}_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

si dice MATRICE HESSIANA di f in $\bar{x}$.

Supponiamo che per ogni $i=1\dots n$, $j=1\dots n$ (f differenziabile 2 volte con continuità)

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ esista per ogni $x\in\mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sia continua su $\mathbb{R}^n$.

($\hookrightarrow$ $\nabla^2 f(x)$ matrice simmetrica)

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T h + \tfrac{1}{2} h^T \nabla^2 f(\bar{x}+th)\, h \quad \text{per qualche } t\in(0,1).$$

FORMULA DI TAYLOR II° ORDINE

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T h + \tfrac{1}{2} \underbrace{h^T \nabla^2 f(\bar{x})\, h} + r_{\bar{x}}(h) \quad \text{con} \quad r_{\bar{x}}(h)/\|h\|_2^2 \xrightarrow[\|h\|_2\to 0]{} 0$$

$$\hookrightarrow\ h^T \nabla^2 f(\bar{x})\, h = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})\, h_i h_j$$

$$h = x-\bar{x} \approx 0 : \quad f(x) \approx \underbrace{f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x-\bar{x}) + \tfrac{1}{2}(x-\bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})}_{\text{approssimazione quadratica di } f \text{ vicino a } \bar{x}}.$$

Funzioni quadratiche $\quad Q\in\mathbb{R}^{n\times n},\ b\in\mathbb{R}^n,\ c\in\mathbb{R}$

$$f(x) = \tfrac{1}{2} x^T Q x + b^T x + c = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} q_{k\ell}\, x_k x_\ell + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c$$

Ipotesi: Q simmetrica $\leftarrow$ non restrittiva: $q_{k\ell} \leftarrow (q_{k\ell}+q_{\ell k})/2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \tfrac{1}{2}\Big[\sum_{\ell=1}^{n} q_{j\ell}\, x_\ell + \sum_{k=1}^{n} q_{kj}\, x_k\Big] + b_j = \tfrac{1}{2}\Big[\sum_{\ell=1}^{n} q_{\ell j}\, x_\ell + \sum_{k=1}^{n} q_{kj}\, x_k\Big] + b_j =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} q_{j\ell}\, x_\ell + b_j = (Qx)_j + b_j \ \to\ \underline{\nabla f(x) = Qx + b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\Big) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} q_{j\ell}\, x_\ell + b_j\Big) = q_{ji} = q_{ij} \ \to\ \underline{\nabla^2 f(x) = Q}$$

$$f(x_1,x_2) = -x_1^4 - x_2^2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -4x_1^3 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -12x_1^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = (0, \overset{0.4}{-2/5}) \qquad \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/5 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad f(\bar{x}) = -\frac{4}{25}$$

$$f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x-\bar{x}) + \frac{1}{2}(x-\bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x}) =$$

$$= -\frac{4}{25} - \frac{4}{5}\left(x_2+\frac{2}{5}\right) - 2\left(x_2+\frac{2}{5}\right)^2 =$$

$$= -\frac{12}{25} - \frac{4}{5}x_2 - 2x_2^2 - \frac{8}{25} - \frac{8}{5}x_2 =$$

$$= \underbrace{-\frac{20}{25} - \frac{12}{5}x_2 - 2x_2^2}$$

<u>Esempio</u>
