Capitolo 3

NORME

1. Norme vettoriali

In questo capitolo vengono introdotti i concetti di norma di un vettore e di norma di una matrice insieme con alcune delle proprietà che le caratterizzano. Il concetto di norma è una generalizzazione del concetto di lunghezza di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, data dall'espressione

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

3.1 Definizione. Una funzione di $\mathbf{C}^n$ in $\mathbf{R}$

$$\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|$$

che verifica le seguenti proprietà

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

b) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$ per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$,

c) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$,

è detta *norma vettoriale.* ■

La proprietà c) corrisponde alla ben nota *disuguaglianza triangolare*, per la quale in un triangolo la somma delle lunghezze di due lati è maggiore od uguale alla lunghezza del terzo lato.

Per indicare in generale una norma si utilizza la notazione $\| \, . \, \|$, specificando con un indice se ci si riferisce ad una norma particolare. Si introducono alcune delle norme vettoriali comunemente usate.

3.2 Definizione. Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$; si definiscono:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| && \text{norma 1} \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} && \text{norma 2} \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| && \text{norma } \infty \end{aligned}$$

La norma 2 è quella che corrisponde alla lunghezza euclidea del vettore $\mathbf{x}$.■

Si dimostra, come esempio, che la norma ∞ verifica le proprietà a), b) e c) della definizione 3.1:

a) poiché $|x_i| \geq 0$ per $i = 1, \ldots, n$, ne segue che $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| \geq 0$ e quindi $\|\mathbf{x}\|_\infty \geq 0$; inoltre se $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| = 0$, deve essere $|x_i| = 0$ per $i = 1, \ldots, n$, e viceversa, quindi $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

b) $\|\alpha\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\alpha x_i| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\alpha|\,|x_i| = |\alpha| \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|_\infty$;

c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \leq \max\limits_{i=1,\ldots,n} (|x_i| + |y_i|)$

$\leq \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max\limits_{i=1,\ldots,n} |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$.

Per le altre due norme la dimostrazione è analoga, in particolare la proprietà c) per la $\|\,.\,\|_2$ viene dimostrata facendo uso della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ((1), cap.1).

Gli insiemi:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}, \\ C_2 &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}, \\ C_\infty &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}, \end{aligned}$$

rappresentano in $\mathbf{R}^2$ i cerchi unitari rispetto alle norme 1, 2 e ∞ (vedere fig.3.1).

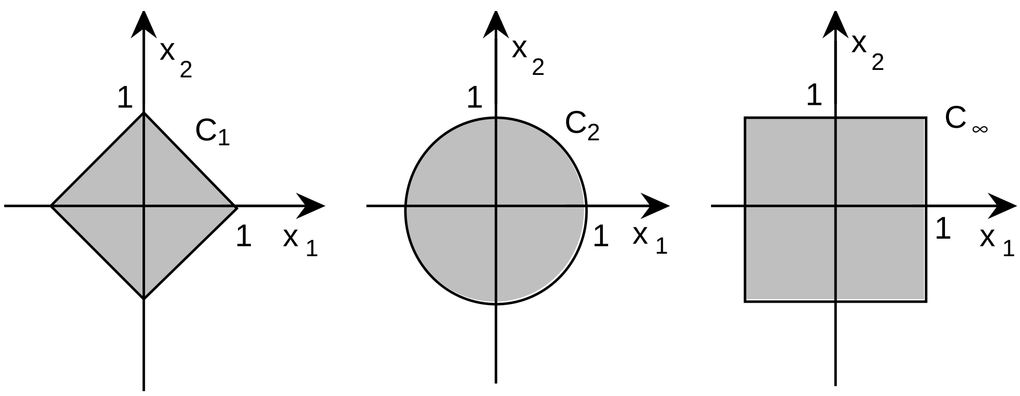

Fig. 3.1 - Cerchi unitari in $\mathbf{R}^2$ rispetto alle norme 1, 2 e ∞.

Alcune proprietà importanti delle norme vettoriali sono date nei seguenti teoremi.

3.3 Teorema. *La funzione* $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$, *è uniformemente continua.*

Dim. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$. Per la proprietà c) delle norme si ha:

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|,$$

da cui

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{1}$$

Inoltre

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\|,$$

da cui

$$-(\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{2}$$

Da (1) e (2) risulta

$$|\ \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\ | \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{3}$$

Posto

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\mathbf{e}_i,$$

dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbf{C}^n$, dalla (3) e dalle proprietà b) e c) si ha:

$$|\ \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\ | \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\ \|\mathbf{e}_i\| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{e}_i\|.$$

Poiché il numero $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \|\mathbf{e}_i\|$ è diverso da zero e non dipende né da $\mathbf{x}$ né da $\mathbf{y}$, si ha che se

$$\max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{\alpha}, \qquad \text{risulta} \quad |\ \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\ | \leq \epsilon. \qquad \blacksquare$$

Altre importanti proprietà sono date dai seguenti teoremi.

3.4 Teorema (di equivalenza delle norme). *Siano* $\|\,.\,\|'$ *e* $\|\,.\,\|''$ *due norme vettoriali. Allora le due norme sono topologicamente equivalenti, nel senso che esistono due costanti* α *e* $\beta \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha \leq \beta$, *tali che per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ *è*

$$\alpha\|\mathbf{x}\|'' \leq \|\mathbf{x}\|' \leq \beta\|\mathbf{x}\|''. \tag{4}$$

Dim. È sufficiente dimostrare la (4) nel caso in cui la norma $\| \,.\, \|''$ sia la norma ∞. Nel caso generale la (4) vale per confronto. Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la relazione è banalmente verificata. Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, si considera l'insieme

$$S = \{\, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n \ : \ \|\mathbf{y}\|_\infty = 1 \,\},$$

che è chiuso e limitato perché è costituito dai vettori le cui componenti hanno modulo minore o uguale a 1, e almeno una componente ha modulo uguale a 1. Essendo $\| \,.\, \|'$ una funzione continua, essa assume su S massimo e minimo:

$$\alpha = \min_{\mathbf{y} \in S} \|\mathbf{y}\|' \qquad \text{e} \qquad \beta = \max_{\mathbf{y} \in S} \|\mathbf{y}\|', \qquad 0 < \alpha \leq \beta.$$

Poiché $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, risulta che $\alpha \neq 0$, e quindi per ogni $\mathbf{y} \in S$ è

$$0 < \alpha \leq \|\mathbf{y}\|' \leq \beta. \tag{5}$$

Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, si consideri il vettore

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\infty};$$

si ha $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ e quindi $\mathbf{y} \in S$ e

$$\|\mathbf{y}\|' = \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \right\| = \frac{\|\mathbf{x}\|'}{\|\mathbf{x}\|_\infty},$$

per la proprietà b) delle norme vettoriali. Sostituendo nella (5), si ha:

$$\alpha \leq \frac{\|\mathbf{x}\|'}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \beta,$$

da cui

$$\alpha \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|' \leq \beta \|\mathbf{x}\|_\infty \qquad \blacksquare$$

Costanti α e β che verificano la (4), relative alle norme definite in 3.2, sono determinate nel seguente

3.5 Teorema. *Per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ *si ha*

1. $$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|\mathbf{x}\|_\infty;$$
2. $$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|\mathbf{x}\|_2;$$
3. $$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\, \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Dim. Per le disuguaglianze del punto 1, ci si può riferire direttamente alla dimostrazione del teorema 3.4; sia

$$S = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n \ : \ \|\mathbf{x}\|_\infty = 1 \,\}.$$

Su S la $\|\,.\,\|_2$ è minima per i vettori $\mathbf{x}$ che hanno una sola componente diversa da 0, in modulo uguale a 1, ed è massima per i vettori $\mathbf{x}$ che hanno tutte le componenti in modulo uguali a 1, cioè $|x_i| = 1,\ i = 1, \ldots, n$. Allora

$$\alpha = \min_{\mathbf{x}\in S} \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \qquad \beta = \max_{\mathbf{x}\in S} \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n}.$$

La prima disuguaglianza del punto 2 si ottiene notando che

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \le \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^n |x_i|\,|x_j| = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|\right]^2 = \|\mathbf{x}\|_1^2.$$

Per la seconda disuguaglianza del punto 2, si consideri il vettore $\mathbf{y}$ definito da

$$y_j = \begin{cases} \dfrac{|x_j|}{\overline{x}_j} & \text{se } x_j \ne 0, \\ 0 & \text{se } x_j = 0. \end{cases}$$

Allora per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ((1), cap. 1), si ha:

$$|\mathbf{x}^H\mathbf{y}| \le \sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}\ \sqrt{\mathbf{y}^H\mathbf{y}},$$

ed essendo

$$|\mathbf{x}^H\mathbf{y}| = \left|\sum_{j=1}^n \overline{x}_j\, y_j\right| = \sum_{j=1}^n |x_j| = \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^H\mathbf{y} \le n,$$

risulta $\|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\ \|\mathbf{x}\|_2$.

Le disuguaglianze del punto 3 si ottengono combinando fra loro quelle degli altri due punti. ∎

Si osservi che per una matrice unitaria A risulta

$$\|A\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n, \tag{6}$$

essendo

$$\|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(A\mathbf{x})^H(A\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}^H A^H A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|_2.$$

2. Norme matriciali

Il concetto di norma può essere esteso al caso delle matrici.

3.6 Definizione. Una funzione di $\mathbf{C}^{n\times n}$ in $\mathbf{R}$

$$A \rightarrow \|A\|$$

che verifica le seguenti proprietà

a) $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se e solo se $A = O$,

b) $\|\alpha A\| = |\alpha|\ \|A\|$ per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$,

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ per ogni $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$,

d) $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$ per ogni $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$,

è detta *norma matriciale.* ■

Anche per le norme matriciali si utilizza la stessa notazione usata per le norme vettoriali. Poiché le proprietà a), b) e c) delle norme matriciali coincidono con quelle delle norme vettoriali, ne segue che anche le norme matriciali sono funzioni uniformemente continue e anche per esse vale un teorema di equivalenza analogo al 3.4.

Si mostra ora come sia possibile associare ad una norma vettoriale una corrisponedente norma matriciale. Si osservi che, poiché la norma vettoriale è una funzione continua, l'insieme

$$\{\, \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n \ :\ \|\mathbf{x}\| = 1 \,\}$$

è chiuso; inoltre, poiché per il teorema 3.4 esiste α tale che $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \alpha\|\mathbf{x}\|$, ossia $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq \alpha$, l'insieme è anche limitato. Poiché una funzione continua assume su un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{C}^n$ massimo e minimo, si ha che esiste

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

3.7 Teorema. *Sia* $\|\ .\ \|$ *una norma vettoriale. La funzione*

$$A \rightarrow \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|, \quad A \in \mathbf{C}^{n\times n}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$$

è una norma matriciale.

Dim. Si verificano le proprietà a), b), c), d), della definizione 3.6.

a) $\|A\mathbf{x}\| \geq 0$ e quindi $\max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \geq 0$. Inoltre se $A = O$, allora $\|A\mathbf{x}\| = 0$ per ogni $\mathbf{x}$; viceversa se $\max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = 0$, allora $\|A\mathbf{x}\| = 0$ per ogni $\mathbf{x}$ tale che $\|\mathbf{x}\| = 1$ e quindi $A = O$.

b) $\max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\alpha A\mathbf{x}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} |\alpha|\ \|A\mathbf{x}\| = |\alpha| \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$.

c) $\max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(A+B)\mathbf{x}\| = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x} + B\mathbf{x}\| \leq \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} (\|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\|)$
$\leq \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| + \max\limits_{\|\mathbf{x}\|=1} \|B\mathbf{x}\|$.

d) Se $AB = O$, allora $\|AB\| = 0$; quindi la disuguaglianza è verificata. Se $AB \neq O$, allora esiste un vettore $\mathbf{y}$, con $\|\mathbf{y}\| = 1$, tale che

$$\|AB\mathbf{y}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|AB\mathbf{x}\| \neq 0.$$

Posto $\mathbf{z} = B\mathbf{y}$, risulta $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ (infatti se fosse $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, sarebbe $(AB)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e quindi $AB = O$), si ha

$$\|(AB)\mathbf{y}\| = \|A(B\mathbf{y})\| = \|A\mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\| \frac{\|A\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} = \|B\mathbf{y}\| \left\| \frac{A\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right\|.$$

Poiché il vettore $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}$ è tale che $\|\mathbf{u}\| = 1$, risulta

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|AB\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{u}\|\ \|B\mathbf{y}\| \leq \max_{\|\mathbf{v}\|=1} \|A\mathbf{v}\| \max_{\|\mathbf{w}\|=1} \|B\mathbf{w}\|. \qquad \blacksquare$$

3.8 Definizione. La norma definita da

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|,$$

viene detta *norma matriciale indotta* dalla norma vettoriale $\| \, . \, \|$. ■

3.9 Teorema. *Dalle tre norme vettoriali definite in 3.2, si ottengono le corrispondenti norme matriciali indotte*

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \textit{norma 1}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} \qquad \textit{norma 2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \textit{norma } \infty$$

Dim. Norma 1 - Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$, tale che $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$. Allora

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ &\le \left[\max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,\end{aligned}$$

e quindi

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1 \le \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Si tratta ora di verificare che esiste un vettore $\mathbf{x}$, $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$, per cui

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Questo vettore esiste in quanto, se k è l'indice della colonna di A in cui la somma dei moduli degli elementi è massima, cioè

$$\sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

il vettore $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ è tale che $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ e

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \|A\mathbf{e}_k\|_1 = \|(a_{1k}, \ldots, a_{nk})^T\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Norma 2 - Poiché la matrice $A^H A$ è hermitiana, per il teorema 2.26 risulta

$$A^H A = U D U^H,$$

dove U è unitaria e D diagonale con gli autovalori di $A^H A$ come elementi principali. Se $A = O$, allora $\rho(A^H A) = 0$, e inversamente, se $\rho(A^H A) = 0$, risulta $D = O$ e quindi $A = O$. Se $A \neq O$, si ha

$$\mathbf{x}^H A^H A \mathbf{x} \ge 0 \quad \text{per } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 2.31, risulta che gli autovalori di $A^H A$ sono non negativi e per almeno uno di essi, corrispondente al raggio spettrale di $A^H A$, si ha

$$\lambda_1 = \rho(A^H A) > 0.$$

Sia $\mathbf{x}$ tale che $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ e $\mathbf{y} = U^H\mathbf{x}$; poiché U è unitaria, per la (6) risulta $\|\mathbf{y}\|_2 = 1$ e quindi

$$\begin{aligned}\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2 &= \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{\mathbf{x}^H A^H A\mathbf{x}} = \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \sqrt{\mathbf{y}^H D\mathbf{y}} \\ &= \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,|y_i|^2} \leq \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \sqrt{\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} \\ &= \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\rho(A^H A)}.\end{aligned}$$

Si tratta ora di verificare che esiste un vettore $\mathbf{x}$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$, per cui

$$\|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}.$$

Questo vettore è $\mathbf{x}_1$, autovettore di $A^H A$ relativo all'autovalore λ_1 normalizzato in modo che $\|\mathbf{x}_1\|_2 = 1$. Infatti risulta:

$$\mathbf{x}_1^H A^H A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1^H \mathbf{x}_1 = \lambda_1 = \rho(A^H A).$$

Norma ∞ - Procedendo in modo analogo a quanto fatto per la norma 1, risulta

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Si tratta ora di verificare che esiste un vettore $\mathbf{x}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, per cui

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Se $A = O$ basta scegliere $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, se $A \neq O$ il vettore $\mathbf{x}$ è dato da

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{|a_{kj}|}{a_{kj}} & \text{se } a_{kj} \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove k è l'indice della riga di A in cui la somma dei moduli degli elementi è massima. ■

Se A è una matrice hermitiana, risulta

$$\begin{aligned}&\|A\|_1 = \|A\|_\infty \\ &\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A),\end{aligned}$$

e se A è anche definita positiva risulta

$$\|A\|_2 = \lambda_{\max},$$

dove $\lambda_{\max}$ è il massimo degli autovalori di A.

Un'altra norma frequentemente usata, anche per la sua semplicità di calcolo, è quella così definita

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^H A)}, \tag{7}$$

che è detta norma di *Frobenius (o di Schur)* di A.

La (7) verifica le proprietà a), b) e c) della definizione 3.6, in quanto gli elementi di A si possono pensare disposti come elementi di un vettore $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^m$, con $m = n^2$, per cui $\|A\|_F = \|\mathbf{a}\|_2$. Per quanto riguarda la proprietà d), sia $C = AB$, ossia

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j = \overline{\mathbf{a}}_i^H \mathbf{b}_j,$$

dove $\mathbf{a}_i^T \in \mathbf{C}^{1\times n}$ è la i-esima riga di A e $\mathbf{b}_j \in \mathbf{C}^n$ è la j-esima colonna di B. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ((1), cap. 1) si ha

$$|c_{ij}|^2 \leq (\overline{\mathbf{a}}_i^H \overline{\mathbf{a}}_i)\,(\mathbf{b}_j^H \mathbf{b}_j) = (\mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i)\,(\mathbf{b}_j^H \mathbf{b}_j),$$

da cui

$$\|C\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_i \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j^H \mathbf{b}_j = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2.$$

Sia $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ una matrice unitaria. Poiché $(UA)^H UA = A^H A$, risulta

$$\|A\|_2 = \|UA\|_2 \quad \text{e} \quad \|A\|_F = \|UA\|_F,$$

poiché $A^H A$ e $(AU)^H AU$ sono matrici simili, risulta

$$\|A\|_2 = \|AU\|_2 \quad \text{e} \quad \|A\|_F = \|AU\|_F,$$

e poiché anche $A^H A$ e $(UAU^H)^H UAU^H = UA^H AU^H$ sono matrici simili, risulta

$$\|A\|_2 = \|UAU^H\|_2 \quad \text{e} \quad \|A\|_F = \|UAU^H\|_F.$$

3. Alcune proprietà delle norme

– Siano $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$. Per la norma matriciale $\| \, . \, \|$ indotta dalla norma vettoriale $\| \, . \, \|$ risulta

$$\|A\mathbf{x}\| \le \|A\| \, \|\mathbf{x}\|.$$

Infatti, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la relazione è ovvia; se $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$, si ha

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \, \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{x}\| \, \|A\mathbf{y}\|,$$

dove il vettore $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ è tale che $\|\mathbf{y}\| = 1$ e quindi

$$\|A\mathbf{y}\| \le \max_{\|\mathbf{z}\|=1} \|A\mathbf{z}\| = \|A\|.$$

– Poiché $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$, per ogni norma matriciale, risulta

$$\|A^m\| \le \|A\|^m \qquad \text{per ogni intero } m \text{ positivo.}$$

– Poiché $\|I\| = \|I\,I\| \le \|I\| \, \|I\|$, risulta $\|I\| \ge 1$ per ogni norma matriciale.

– Se $\| \, . \, \|$ è una norma matriciale indotta, allora risulta $\|I\| = 1$. Infatti per definizione di norma indotta si ha:

$$\|I\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|I\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{x}\| = 1.$$

Per questo si osservi che la norma di Frobenius non può essere una norma indotta in quanto

$$\|I\|_F = \sqrt{n} \ne 1 \quad \text{per } n > 1.$$

– Se $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ è non singolare, allora, poiché

$$\|I\| = \|A^{-1}A\| \le \|A^{-1}\| \, \|A\|,$$

per ogni norma matriciale risulta:

$$\|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|}.$$

3.10 Teorema. *Per ogni norma $\| \, . \, \|$ matriciale indotta vale*

$$\rho(A) \le \|A\|.$$

Dim. Siano λ un autovalore e $\mathbf{x}$ il corrispondente autovettore normalizzato rispetto alla norma $\| \, . \, \|$:

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \qquad \|\mathbf{x}\| = 1.$$

Allora

$$|\lambda| = \|A\mathbf{x}\|,$$

da cui segue che

$$|\lambda| \le \max_{\|\mathbf{v}\|=1} \|A\mathbf{v}\| = \|A\|.$$

Questa relazione vale per ogni autovalore λ di A e quindi anche per quello di modulo massimo. ∎

3.11 Teorema. *La funzione*

$$A \to \|S^{-1}AS\|_\infty,$$

dove S è una matrice non singolare, è una norma matriciale indotta.

Dim. La funzione

$$\mathbf{x} \to \|S^{-1}\mathbf{x}\|_\infty, \tag{8}$$

poiché S^{-1} è una matrice non singolare, verifica le proprietà a), b) e c) della definizione 3.1, e quindi è una norma vettoriale. La norma matriciale indotta dalla (8) è data da

$$\|A\| = \max_{\|S^{-1}\mathbf{x}\|_\infty=1} \|S^{-1}A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{\|\mathbf{y}\|_\infty=1} \|S^{-1}AS\mathbf{y}\|_\infty,$$

avendo posto $\mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}$. ∎

3.12 Teorema. *Sia $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$; allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste una norma matriciale indotta $\| \, . \, \|$ tale che*

$$\|A\| \le \rho(A) + \epsilon.$$

Dim. Sia J la forma canonica di Jordan di A (si veda il teorema 2.18):

$$A = TJT^{-1},$$

in cui J è una matrice diagonale a blocchi e ciascun blocco è della forma

$$C_i^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

dove λ_i è un autovalore di A. Data la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \epsilon & & & \\ & & \epsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \epsilon^{n-1} \end{bmatrix},$$

risulta che la matrice

$$E^{-1}JE = E^{-1}T^{-1}ATE$$

è ancora una matrice diagonale a blocchi e ciascun blocco è della forma

$$D_i^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \epsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & \epsilon \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Si ha:

$$\|E^{-1}JE\|_\infty = \|E^{-1}T^{-1}ATE\|_\infty = \max_{i,j} \|D_i^{(j)}\|_\infty \leq \rho(A) + \epsilon,$$

dove la disuguaglianza vale in senso stretto nel caso in cui i blocchi $D_i^{(j)}$ relativi agli autovalori di modulo massimo siano di ordine 1, ed ϵ sia abbastanza piccolo. Per il teorema 3.11, $\|E^{-1}T^{-1}ATE\|_\infty$ è una norma matriciale indotta di A. ∎

Si osservi che se gli autovalori corrispondenti a $\rho(A)$ hanno molteplicità algebrica uguale a quella geometrica, esiste una norma matriciale indotta $\| \,.\, \|$ tale che

$$\|A\| = \rho(A).$$

In particolare questo accade se la matrice A è diagonalizzabile.

3.13 Teorema. *Sia $\| \,.\, \|$ una norma matriciale indotta e sia $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, tale che $\|A\| < 1$. Allora la matrice $I+A$ è non singolare e vale la disuguaglianza*

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Dim. Essendo $\|A\| < 1$, per il teorema 3.10 risulta $\rho(A) < 1$. Quindi la matrice $I + A$ non può avere autovalori nulli, ed è non singolare. Dalla relazione

$$(I + A)\,(I + A)^{-1} = I$$

segue che

$$(I + A)^{-1} = I - A(I + A)^{-1},$$

e poiché $\|I\| = 1$, per le proprietà c) e d) delle norme si ha:

$$\|(I + A)^{-1}\| \le 1 + \|A\|\, \|(I + A)^{-1}\|,$$

e quindi

$$(1 - \|A\|)\, \|(I + A)^{-1}\| \le 1,$$

da cui, essendo $\|A\| < 1$, segue la tesi. ∎

4. Principali relazioni fra le norme matriciali

Per le norme che sono state introdotte valgono le seguenti relazioni, che possono essere dimostrate usando il teorema 3.5 e la definizione di norma indotta:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n}}\, \|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\, \|A\|_\infty,\\
&\frac{1}{\sqrt{n}}\, \|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\, \|A\|_1,\\
&\max_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\|_2 \le n \max_{i,j} |a_{ij}|,\\
&\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\, \|A\|_\infty}
\end{aligned}$$

Ad esempio, l'ultima relazione si dimostra nel modo seguente: poiché gli autovalori della matrice semidefinita positiva $A^H A$ sono non negativi, l'autovalore massimo $\lambda_{\max}$ di $A^H A$ coincide con $\rho(A^H A)$, e dalla relazione

$$A^H A\mathbf{x} = \lambda_{\max}\, \mathbf{x},$$

passando alle norme, segue che

$$\begin{aligned}
\rho(A^H A)\, \|\mathbf{x}\|_\infty = \lambda_{\max}\, \|\mathbf{x}\|_\infty &= \|A^H A\mathbf{x}\|_\infty\\
&\le \|A^H\|_\infty\, \|A\|_\infty\, \|\mathbf{x}\|_\infty = \|A\|_1\, \|A\|_\infty\, \|\mathbf{x}\|_\infty,
\end{aligned}$$

da cui

$$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1\, \|A\|_\infty.$$

Inoltre si ha

$$\rho(A^H A) = \lambda_{\max} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(A^H A) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(A^H A) = n\,\rho(A^H A),$$

da cui si ricava la seguente relazione di equivalenza fra la norma 2 e la norma di Frobenius:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2.$$

Esercizi proposti

3.1 Si determinino dei vettori di $\mathbf{C}^n$ tali che

(1) $\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_\infty$

(2) $\|\mathbf{x}\|_1 = \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 = n\,\|\mathbf{x}\|_\infty$.

3.2 Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$ due vettori ortogonali. Si dimostri che vale la seguente relazione

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2$$

(se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ la relazione esprime il *teorema di Pitagora*).

3.3 Sia $\|\ .\ \|$ una norma vettoriale e sia S la *sfera unitaria* rispetto a tale norma, cioè

$$S = \{\ \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n \quad \text{tali che } \|\mathbf{x}\| \leq 1\ \}.$$

Si dimostri che S è un insieme convesso.

(Traccia: siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in S$; per ogni $\alpha \in [0,1]$ risulta

$$\|\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\,\mathbf{y}\| \leq \alpha\|\mathbf{x}\| + (1-\alpha)\,\|\mathbf{y}\| \leq 1.)$$

3.4 Sia $p > 1$ e $q = \dfrac{p}{p-1}$. Si dimostri che

a) per ogni $\alpha,\ \beta > 0$ risulta

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q};$$

b) se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$, posto

$$f_p(\mathbf{x}) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \quad \text{e} \quad f_q(\mathbf{y}) = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q},$$