Capitolo 1

ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE

1. Matrici

Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{R}$ rispettivamente il campo dei numeri complessi e il campo dei numeri reali. Sia inoltre $\mathbf{i}$ l'unità immaginaria tale che $\mathbf{i}^2 = -1$. Con $\mathbf{C}^{m\times n}$ si indica l'insieme delle matrici ad elementi complessi con m righe ed n colonne; in alcuni casi si fa esplicito riferimento al sottoinsieme $\mathbf{R}^{m\times n}$ delle matrici ad elementi reali. Se $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, si dice che A è una matrice *quadrata di ordine* n.

Generalmente le matrici vengono indicate con lettera maiuscola, mentre i loro elementi sono indicati con lettera minuscola seguita dai due indici (indice di *riga* e indice di *colonna*): ad esempio a_{ij} è elemento della matrice A. Si usa scrivere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Gli elementi a_{ij} tali che $i = j$ vengono detti elementi *diagonali* o *principali* di A e formano la *diagonale principale* di A.

Data una matrice $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, si definisce matrice *trasposta coniugata* di A la matrice $B \in \mathbf{C}^{n\times m}$ tale che

$$b_{ij} = \overline{a}_{ji},$$

dove $\overline{a}_{ji}$ è il coniugato del numero complesso a_{ji}, e si indica $B = A^H$. Se $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, la trasposta coniugata di A coincide con la matrice *trasposta* così definita

$$B = A^T, \qquad b_{ij} = a_{ji}.$$

Una matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ è:

diagonale se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$;

scalare se è diagonale e $a_{ii} = \alpha \in \mathbf{C}$;

triangolare superiore (inferiore) se $a_{ij} = 0$ per $i > j$ (per $i < j$);

triangolare superiore (inferiore) in senso stretto se $a_{ij} = 0$ per $i \geq j$ (per $i \leq j$);

tridiagonale se $a_{ij} = 0$ per $|i - j| > 1$.

Le seguenti operazioni fra matrici:

addizione di matrici $(\mathbf{C}^{m\times n} \times \mathbf{C}^{m\times n} \to \mathbf{C}^{m\times n})$:

$$C = A + B, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

moltiplicazione di un numero per una matrice $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{m\times n} \to \mathbf{C}^{m\times n})$:

$$B = \alpha\, A, \qquad b_{ij} = \alpha\, a_{ij},$$

inducono su $\mathbf{C}^{m\times n}$ la struttura di *spazio vettoriale* su $\mathbf{C}$, in cui l'elemento *neutro* è la matrice con tutti gli elementi nulli, che viene indicata con $O_{m\times n}$ o semplicemente con O se dal contesto risulta chiaramente quali sono le dimensioni. Valgono le proprietà di associatività e commutatività per l'addizione e di distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Si definisce *prodotto righe per colonne* di due matrici $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ e $B \in \mathbf{C}^{n\times p}$ la matrice $C = A\, B \in \mathbf{C}^{m\times p}$, i cui elementi sono

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

(si osservi che il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B).

La moltiplicazione fra matrici gode della proprietà associativa, di quella distributiva rispetto all'addizione, ma non di quella commutativa (si vedano gli esercizi 1.1 e 1.2). Vale inoltre la proprietà

$$(A\, B)^H = B^H A^H.$$

La matrice scalare di ordine n avente gli elementi principali uguali a 1 è detta matrice *identica* e viene indicata con I_n o semplicemente con I se dal contesto risulta chiaramente quale è l'ordine. Tale matrice verifica le relazioni

$$\left.\begin{aligned} I_m A &= A \\ A I_n &= A \end{aligned}\right\} \qquad \text{per ogni matrice } A \in \mathbf{C}^{m\times n}.$$

Una matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ si dice:

normale se $A^H A = A\, A^H$;

hermitiana se $A^H = A$;

unitaria se $A^H A = A\, A^H = I$.

Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$; se A è hermitiana, allora risulta $A^T = A$ e A è detta *simmetrica*; se A è unitaria, allora risulta $A^T A = A\, A^T = I$ e A è detta *ortogonale*.

1.1 Esempio. La matrice

$$G = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \qquad \phi \in \mathbf{R},$$

è unitaria. Infatti

$$G\,G^H = G^H G = \begin{bmatrix} \sin^2\phi + \cos^2\phi & 0 \\ 0 & \sin^2\phi + \cos^2\phi \end{bmatrix} = I.$$

Inoltre, poiché è reale, G è anche ortogonale. ∎

Particolarmente importanti fra le matrici ortogonali sono le *matrici di permutazione*, cioè matrici ottenute permutando le righe della matrice identica I. Le matrici di permutazione in ogni riga e ogni colonna hanno un solo elemento diverso da zero e uguale a 1.

Un sottoinsieme di $\mathbf{C}^{n\times n}$ si dice *chiuso rispetto all'operazione di moltiplicazione*, se date due matrici A e B appartenenti al sottoinsieme, anche il prodotto AB appartiene al sottoinsieme. I seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{C}^{n\times n}$ sono chiusi rispetto all'operazione di moltiplicazione:

- matrici triangolari superiori (inferiori),
- matrici triangolari superiori (inferiori) in senso stretto,
- matrici unitarie.

Data una matrice $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, una matrice $B \in \mathbf{C}^{k\times h}$, $0 \le k < m$, $0 \le h < n$, è detta *sottomatrice* di A se è ottenuta da A eliminando $m-k$ righe e $n-h$ colonne. Data una matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, una sottomatrice quadrata B di ordine $k \le n$ di A è detta *principale* se gli elementi principali di B sono anche elementi principali di A (cioè le righe e le colonne di A che concorrono alla costruzione di B hanno medesimo indice). Una sottomatrice B principale di ordine k di A è detta *principale di testa* se è formata dagli elementi a_{ij}, $i,\ j = 1,\dots,k$.

1.2 Esempio. Si consideri la matrice $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

è sottomatrice di ordine 2 di A, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

è sottomatrice principale di ordine 2 di A, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

è sottomatrice principale di testa di ordine 2 di A. ■

2. Vettori

Se $A \in \mathbf{C}^{m\times 1}(A \in \mathbf{C}^{1\times m})$, la matrice si riduce ad una sola colonna (riga) e viene detta *vettore colonna (riga) ad m elementi* o *componenti.*

Comunemente con il termine *vettore* si intende un vettore colonna e lo spazio vettoriale $\mathbf{C}^{m\times 1}$ dei vettori ad m componenti viene indicato con $\mathbf{C}^m$. Un vettore è generalmente indicato con lettera minuscola in grassetto e le singole componenti sono indicate con lettera minuscola seguita da un indice: ad esempio x_i è l'i-esima componente del vettore $\mathbf{x}$. Si usa scrivere

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{o anche} \quad \mathbf{x} = [x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m]^T.$$

Si indica con $\mathbf{0}$ il vettore di componenti nulle. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^m$, allora $\mathbf{x}^H \in \mathbf{C}^{1\times m}$ è il vettore riga le cui componenti sono le coniugate di quelle di $\mathbf{x}$.

Casi particolari del prodotto righe per colonne di matrici:

prodotto di una matrice per un vettore $(\mathbf{C}^{m\times n} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m)$:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j, \qquad i = 1, \ldots, m;$$

prodotto interno fra vettori $(\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C})$:

$$\alpha = \mathbf{x}^H\mathbf{y}, \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i\, y_i;$$

prodotto esterno fra vettori $(\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^{1\times n} \to \mathbf{C}^{m\times n})$:

$$A = \mathbf{x}\,\mathbf{y}^H, \qquad a_{ij} = x_i\overline{y}_j, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Il vettore $\dfrac{1}{\alpha}\,\mathbf{x}$, $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbf{C}$, viene talvolta indicato con $\dfrac{\mathbf{x}}{\alpha}$.

1.3 Esempio. Dati i vettori

$$\mathbf{x} = [1,\ \mathbf{i},\ -\mathbf{i}]^T \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = [\mathbf{i},\ 1,\ \mathbf{i}]^T,$$

risulta

$$\mathbf{x}^H\mathbf{y} = -1,$$

$$\mathbf{x}\,\mathbf{y}^H = \begin{bmatrix} \text{-}\mathbf{i} & 1 & \text{-}\mathbf{i} \\ 1 & \mathbf{i} & 1 \\ \text{-}1 & \text{-}\mathbf{i} & \text{-}1 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Il prodotto interno fra vettori definisce un *prodotto scalare* su $\mathbf{C}^n$ e gode delle seguenti proprietà (si veda l'esercizio 1.26):

1. $\mathbf{x}^H\mathbf{x}$ è reale e non negativo, ed è nullo se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $\overline{\mathbf{x}^H\mathbf{y}} = \mathbf{y}^H\mathbf{x}$;
3. $\mathbf{x}^H(\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,\mathbf{x}^H\mathbf{y}$ per $\alpha \in \mathbf{C}$;
4. $\mathbf{x}^H(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^H\mathbf{y} + \mathbf{x}^H\mathbf{z}$ per $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$.

La quantità $\sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}$ è la *lunghezza euclidea* del vettore $\mathbf{x}$, per cui il vettore $\dfrac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}}$ ha lunghezza 1. In $\mathbf{R}^n$, se $\mathbf{x}$ ha lunghezza 1, il prodotto $\mathbf{x}^H\mathbf{y}$ dà la *proiezione* di $\mathbf{y}$ sulla semiretta su cui giace il vettore $\mathbf{x}$. Poiché vale la disuguaglianza di *Cauchy-Schwarz*

$$|\mathbf{x}^H\mathbf{y}|^2 \le (\mathbf{x}^H\mathbf{x})\ (\mathbf{y}^H\mathbf{y}), \tag{1}$$

(si veda l'esercizio 1.30) è possibile definire l'*angolo* θ formato da due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$:

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{x}^H\mathbf{y}}{\sqrt{(\mathbf{x}^H\mathbf{x})\ (\mathbf{y}^H\mathbf{y})}}.$$

È facile verificare che in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$ questa definizione corrisponde al concetto geometrico di angolo, come si può vedere nel caso di $\mathbf{R}^2$ nella figura 1.1.

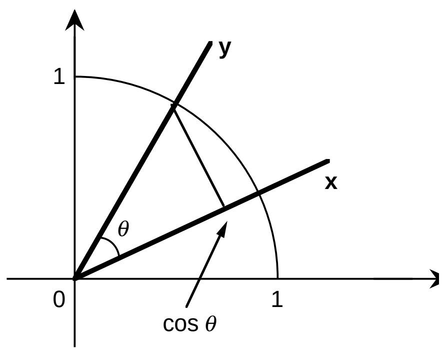

Fig.1.1 - Angolo fra due vettori.

Se $\mathbf{x}^H\mathbf{y} = 0$, i due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono detti *ortogonali.*

1.4 Definizione. I vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{C}^m, n \le m$, si dicono *linearmente indipendenti* se dalla condizione

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \quad \alpha_i \in \mathbf{C},$$

segue che

$$\alpha_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad \blacksquare$$

n vettori, che non sono linearmente indipendenti, si dicono *linearmente dipendenti*; in tal caso se $\alpha_k \neq 0$, si ha

$$\mathbf{x}_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \beta_i \,\mathbf{x}_i, \quad \text{dove} \quad \beta_i = -\,\frac{\alpha_i}{\alpha_k}\,, \quad i = 1, \ldots, n, \;\; i \neq k.$$

1.5 Definizione. Sia S un sottospazio di $\mathbf{C}^n$. k vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in S$ costituiscono una *base* di S se ogni vettore $\mathbf{v} \in S$ può essere espresso, in modo unico, come combinazione lineare dei vettori della base

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \,\mathbf{x}_i.$$

Si dice anche che S è *generato* dalla base $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. $\blacksquare$

Una base di $\mathbf{C}^n$ particolarmente importante è la cosiddetta *base canonica*, formata dai vettori

$$\mathbf{e}_i = [0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1}, 0, \ldots, 0]^T, \quad i = 1, \ldots, n,$$

che sono le colonne della matrice identica di ordine n.

I k vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ di una base sono linearmente indipendenti; inoltre tutte le basi di un sottospazio hanno lo stesso numero di elementi, e tale numero, indicato con $\dim S$, è detto *dimensione* del sottospazio. Lo spazio $\mathbf{C}^n$, come spazio vettoriale sul campo $\mathbf{C}$, ha dimensione n, e ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{C}^n$ costituisce una base di $\mathbf{C}^n$.

Siano S e T due sottospazi di $\mathbf{C}^n$. Allora la somma

$$S + T = \{\mathbf{s} + \mathbf{t},\; \mathbf{s} \in S,\; \mathbf{t} \in T\}$$

e l'intersezione $S \cap T$ sono ancora sottospazi. Per le loro dimensioni vale la seguente relazione

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T), \tag{2}$$

da cui segue che

$$\max\{\dim S, \dim T\} \le \dim(S+T) \le \min\{\dim S + \dim T, n\}, \tag{3}$$

$$\max\{0, \dim S + \dim T - n\} \le \dim(S \cap T) \le \min\{\dim S, \dim T\}. \tag{4}$$

Se $S \cap T = \{\,\mathbf{0}\,\}$, il sottospazio $X = S + T$ è detto *somma diretta* di S e T e viene di solito indicato con $S \oplus T$. In tal caso

$$\dim X = \dim S + \dim T,$$

e gli elementi $\mathbf{x}$ di X possono essere espressi univocamente con la somma

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{t}, \quad \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{t} \in T.$$

1.6 Definizione. Sia S un sottospazio di $\mathbf{C}^n$. Il sottospazio

$$S^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}^n \ :\ \mathbf{u}^H\mathbf{v} = 0 \text{ per ogni } \mathbf{v} \in S\}$$

è detto *sottospazio ortogonale* ad S. Valgono le seguenti relazioni

$$S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\},$$

$$S \oplus S^\perp = \mathbf{C}^n,$$

$$\dim S^\perp = n - \dim S.$$

Quindi ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ può essere espresso univocamente come somma

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{t},\ \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{t} \in S^\perp. \tag{5}$$

Il vettore $\mathbf{s}$ è detto *proiezione ortogonale* di $\mathbf{x}$ su S. ∎

1.7 Esempio. In $\mathbf{R}^3$ sia S il sottospazio generato dal vettore

$$\mathbf{x}_1 = [0,\ 0,\ 1]^T.$$

S è quindi costituito da tutti i vettori le cui due prime componenti sono nulle, e la sua dimensione è 1. Lo spazio $S^\perp$, costituito dai vettori la cui terza componente è nulla, è quindi generato dai vettori

$$\mathbf{x}_2 = [1,\ 0,\ 0]^T \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}_3 = [0,\ 1,\ 0]^T$$

e la sua dimensione è 2. La figura 1.2 fornisce per questo caso l'interpretazione geometrica della relazione (5). ■

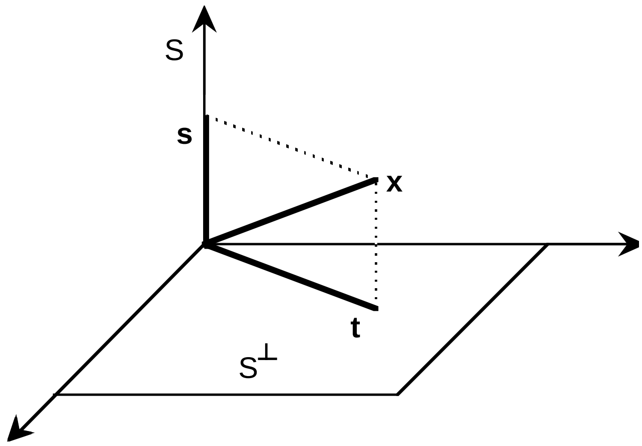

Fig. 1.2 - Proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su S.

1.8 Definizione. n vettori non nulli $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{C}^m$ si dicono *ortogonali* se $\mathbf{x}_i^H \mathbf{x}_j = 0$ per $i \neq j$; si dicono *ortonormali* se sono ortogonali ed inoltre $\mathbf{x}_i^H \mathbf{x}_i = 1$, cioè se hanno lunghezza 1 o, come si dice, se sono *normalizzati.* In questo caso si usa anche la notazione

$$\mathbf{x}_i^H \mathbf{x}_j = \delta_{ij},$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

è il *delta di Kronecker.* ■

Si osservi che n vettori ortogonali sono anche linearmente indipendenti.

1.9 Esempio. I vettori

$$\mathbf{x} = [1,\, \mathbf{i},\, -\mathbf{i}]^T \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = [\mathbf{i},\, 1,\, \mathbf{i}]^T,$$

dell'esempio 1.3 sono linearmente indipendenti, ma non ortogonali: infatti $\mathbf{x}^H \mathbf{y} = -1 \neq 0$. I vettori

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \mathbf{x} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{8}}\, [-2\mathbf{i},\, -1-\mathbf{i},\, 1-\mathbf{i}]^T$$

sono ortonormali: infatti $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v}^H \mathbf{v} = 1$ e $\mathbf{u}^H \mathbf{v} = 0$. Il vettore

$$\mathbf{z} = \mathbf{i}\mathbf{x} + \mathbf{y} = [2\mathbf{i},\, 0,\, \mathbf{i}+1]^T$$

è combinazione lineare di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$: quindi i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti. ∎

Fra le diverse basi di $\mathbf{C}^n$ sono particolarmente importanti le *basi ortonormali*, cioè quelle in cui i vettori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sono ortonormali.

Se del sottospazio S di $\mathbf{C}^n$ è nota una base $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, è possibile costruire una base ortonormale $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ con il metodo di *ortogonalizzazione di Gram-Schmidt* basato sul seguente teorema.

1.10 Teorema. *Se* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{C}^n$, $k \leq n$, *sono* k *vettori linearmente indipendenti, i vettori* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$, *così costruiti*

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{y}_1 = \mathbf{t}_1 / \sqrt{\mathbf{t}_1^H \mathbf{t}_1}, \\ &\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{y}_j^H \mathbf{x}_i)\, \mathbf{y}_j, \qquad \mathbf{y}_i = \mathbf{t}_i / \sqrt{\mathbf{t}_i^H \mathbf{t}_i}, \qquad i = 2, \ldots, k, \end{aligned}$$

sono ortonormali.

Dim. I vettori $\mathbf{y}_i$ sono normalizzati. Per dimostrare l'ortogonalità si procede per induzione su k. Per $k = 2$, poiché

$$\mathbf{t}_2^H \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2^H \mathbf{y}_1 - (\mathbf{x}_2^H \mathbf{y}_1)\, \mathbf{y}_1^H \mathbf{y}_1 = 0,$$

ne segue che $\mathbf{y}_2^H \mathbf{y}_1 = 0$. Per $k > 2$, supponendo che i vettori $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}$ siano ortonormali, si dimostra che $\mathbf{t}_k$ è ortogonale a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}$. Infatti, poiché

$$\mathbf{y}_j^H \mathbf{y}_i = 0 \quad \text{per} \quad j,\ i \leq k-1,\ i \neq j,$$

risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_k^H \mathbf{y}_i &= \mathbf{x}_k^H \mathbf{y}_i - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{x}_k^H \mathbf{y}_j)\, \mathbf{y}_j^H \mathbf{y}_i \\ &= \mathbf{x}_k^H \mathbf{y}_i - (\mathbf{x}_k^H \mathbf{y}_i)\, \mathbf{y}_i^H \mathbf{y}_i = 0. \end{aligned}$$ ∎

1.11 Esempio. I vettori di $\mathbf{C}^n$

$$\mathbf{x}_i = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{i \text{ componenti}}, 0, \ldots, 0]^T, \quad i = 1, \ldots, n,$$

costituiscono una base non ortonormale di $\mathbf{C}^n$. Applicando il metodo di Gram-Schmidt ai vettori $\mathbf{x}_i$, si ottengono i vettori $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, della base canonica di $\mathbf{C}^n$. I vettori di $\mathbf{C}^n$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_1$$

sono linearmente indipendenti. Applicando il metodo di Gram-Schmidt si ottengono i vettori

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0]^T,\\
\mathbf{y}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\,[1,\ -1,\ -2,\ 0,\ \ldots,\ 0]^T,\\
\mathbf{y}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{4}}\,[1,\ -1,\ 1,\ 3,\ 0,\ \ldots,\ 0]^T,\\
&\ \vdots\\
\mathbf{y}_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}\,[1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ (-1)^n(n-1)]^T,\\
\mathbf{y}_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}\,[1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ (-1)^{n+1}]^T,
\end{aligned}$$

che costituiscono una base ortonormale di $\mathbf{C}^n$. ■

3. Matrici definite positive

Se $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ è una matrice hermitiana, cioè $A = A^H$, e $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$, il numero

$$\alpha = \mathbf{x}^H A\mathbf{x}$$

è reale. Infatti, poiché A è hermitiana, si ha:

$$\overline{\alpha} = \overline{\mathbf{x}^H A\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^H A\mathbf{x})^H = \mathbf{x}^H A^H\mathbf{x} = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} = \alpha.$$

1.12 Definizione. Sia $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ una matrice hermitiana. Se per qualsiasi $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, il numero reale $\alpha = \mathbf{x}^H A\mathbf{x}$ mantiene lo stesso segno, si dice che la matrice A è *definita in segno*, e in particolare:

se $\mathbf{x}^H A\mathbf{x} > 0$ $\quad$ A è *definita positiva*,
se $\mathbf{x}^H A\mathbf{x} \geq 0$ $\quad$ A è *semidefinita positiva*,
se $\mathbf{x}^H A\mathbf{x} \leq 0$ $\quad$ A è *semidefinita negativa*,
se $\mathbf{x}^H A\mathbf{x} < 0$ $\quad$ A è *definita negativa*. ■

1.13 Esempio. La matrice hermitiana

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \mathbf{i} \\ \text{-}\mathbf{i} & 3 \end{bmatrix}$$

è definita positiva. Infatti per ogni $\mathbf{x} = [x_1\ ,\ x_2]^T \neq \mathbf{0}$ risulta:

$$\mathbf{x}^H A\mathbf{x} = |x_1 - \mathbf{i}x_2|^2 + 2|x_2 - \mathbf{i}x_1|^2 > 0.$$ ■

1.14 Teorema. *Se una matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ è definita positiva, anche tutte le sue sottomatrici principali sono definite positive.*

Dim. Sia B una sottomatrice principale di A ottenuta eliminando $(n-i)$ righe e le corrispondenti $(n-i)$ colonne. Per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^i$, $\mathbf{x} \neq 0$, si consideri il vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$ che ha nulli gli elementi con indici uguali a quelli delle colonne soppresse e i rimanenti elementi uguali ai corrispondenti elementi di $\mathbf{x}$. Allora, poiché A è definita positiva, si ha

$$\mathbf{x}^H B\mathbf{x} = \mathbf{y}^H A\mathbf{y} > 0. \qquad \blacksquare$$

Poiché le sottomatrici principali di ordine 1 sono formate da un solo elemento principale, ne segue che in una matrice definita positiva tutti gli elementi principali, oltre a essere reali perché la matrice è hermitiana, sono positivi.

4. Determinante

1.15 Definizione. Sia $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Si definisce *determinante* di A il numero

$$\det A = \sum_{\pi\in P} \mathrm{sgn}(\pi)\, a_{1,\pi_1}\, a_{2,\pi_2} \ldots a_{n,\pi_n}$$

dove P è l'insieme degli $n!$ vettori $\pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]^T$, ottenuti permutando in tutti i modi possibili le componenti del vettore $[1,\, 2, \ldots, n]^T$; il fattore $\mathrm{sgn}(\pi)$ vale $+1$ o -1 a seconda che sia pari o dispari il numero degli scambi necessari per portare il vettore $[1,\, 2, \ldots, n]^T$ nel vettore π. $\blacksquare$

Il determinante di una matrice può essere più semplicemente espresso utilizzando la *regola di Laplace*. Indicata con A_{ij} la sottomatrice quadrata di ordine $n-1$ ottenuta dalla matrice A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna, per un qualunque indice di riga i si ha:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} & \text{se } n > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Siano A, $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbf{C}$; valgono le seguenti proprietà :

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \text{se } A \text{ è diagonale o triangolare;}$$

$$\det I = 1;$$

$\det A^T = \det A$	
$\det A^H = \overline{\det A}$;	
$\det(A\,B) = \det A \det B$	(regola di *Binet*);
$\det B = \alpha \det A$,	se B è ottenuta da A moltiplicando per α una riga (o una colonna);
$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$;	
$\det B = -\det A$,	se B è ottenuta da A scambiando fra loro due righe (o colonne);
$\det B = \det A$,	se B è ottenuta da A aggiungendo ad una riga (o colonna) un'altra riga (o colonna) moltiplicata per un numero;
$\det A = 0$,	se due o più righe (o colonne) di A sono linearmente dipendenti.

Poiché $\det A = \det A^T$, la regola di Laplace per il calcolo del determinante di A può essere applicata sommando nella (6) rispetto all'indice di riga i.

5. Matrice inversa

1.16 Definizioni. Sia $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, si definiscono:

matrice inversa di A una matrice $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ tale che

$$AB = BA = I,$$

matrice aggiunta di A la matrice $\mathrm{adj}A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, il cui elemento (i,j)-esimo è dato da

$$(-1)^{i+j} \det A_{ji},$$

dove A_{ji} è la sottomatrice ottenuta da A cancellando la j-esima riga e la i-esima colonna. ∎

Una matrice A per cui non esiste la matrice inversa è detta *singolare.* Poiché vale la relazione (si veda l'esercizio 1.48)

$$A\ \mathrm{adj}A = (\det A)I,$$

ne segue che A è non singolare se e solo se $\det A \neq 0$, quindi se A è non singolare, la matrice inversa, che viene indicata con A^{-1}, è unica ed è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ \mathrm{adj}A.$$

Valgono le seguenti proprietà:

$(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$ (si indica anche con A^{-H});

$A^{-1} = A^H$ se A è unitaria, cioè tale che $A^H A = AA^H = I$;

$\det A^{-1} = 1/\det A$;

$(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

I seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{C}^{n\times n}$ sono *chiusi rispetto all'operazione di inversione*, cioè se A è una matrice non singolare appartenente al sottoinsieme, anche A^{-1} appartiene al sottoinsieme:

– matrici hermitiane,
– matrici unitarie,
– matrici normali,
– matrici definite positive (negative),
– matrici triangolari superiori (inferiori),
– matrici diagonali.

6. Sistemi lineari

Sia $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ e si considerino i seguenti sottospazi

$$S(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{C}^m \ : \ \mathbf{y} = A\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n\},$$

detto *immagine* di A e

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

detto *nucleo* di A. Si può dimostrare che

$$S(A)^\perp = N(A^H),$$

e quindi

$$\dim S(A) + \dim N(A^H) = m.$$

Il numero $\dim S(A)$ viene detto *rango* di A ed è uguale al numero delle righe (e delle colonne, si veda l'esercizio 1.35) linearmente indipendenti di A. Poiché il rango di A e il rango di A^H sono uguali, risulta

$$\dim S(A) + \dim N(A) = n. \tag{7}$$

Più in generale, se T è un sottospazio di $\mathbf{C}^n$, posto

$$S_T(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{C}^m \ : \ \mathbf{y} = A\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in T\},$$

$$N_T(A) = \{\mathbf{x} \in T \;:\; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = N(A) \cap T,$$

si ha

$$\dim S_T(A) + \dim N_T(A) = \dim T.$$

1.17 Esempio. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{-1} & 1 & \text{-1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sottospazio $S(A)$ è quello generato dai vettori

$$\mathbf{y}_1 = [1,\, 1,\, 1]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_2 = [1,\, -1,\, 0]^T,$$

e quindi

$$\text{rango di } A = \dim S(A) = 2.$$

Il nucleo di A è il sottospazio generato dai vettori

$$\mathbf{x}_1 = [1,\, 0,\, -1,\, 0]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = [0,\, 1,\, 0,\, -1]^T,$$

e quindi

$$\dim N(A) = 2.$$

Il sottospazio $S(A^T)$ è quello generato dai vettori

$$\mathbf{x}_3 = [1,\, 1,\, 1,\, 1]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_4 = [1,\, -1,\, 1,\, -1]^T,$$

e infatti

$$\text{rango di } A^T = \dim S(A^T) = \dim S(A) = 2.$$

Il nucleo di A^T è il sottospazio generato dal vettore

$$\mathbf{y}_3 = [1,\, 1,\, -2]^T$$

e infatti

$$\dim N(A^T) = 1. \qquad \blacksquare$$

1.18 Esempio. Se $\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, la matrice (detta *diade*)

$$A = \mathbf{x}\,\mathbf{y}^H$$

ha rango 1. Infatti le colonne di A sono i vettori

$$\overline{y}_1\,\mathbf{x},\; \overline{y}_2\,\mathbf{x},\; \ldots,\; \overline{y}_n\,\mathbf{x},$$

che sono a due a due linearmente dipendenti. ■

Se $m = n$, A è non singolare se e solo se rango di $A = n$, e dalla (7) segue che A è non singolare se e solo

$$\dim N(A) = 0,$$

cioè il nucleo di A è costituito dal solo vettore nullo.

Se rango di $A = r = \min\{m, n\}$, allora la matrice A si dice di *rango massimo*. In tal caso la matrice $A^H A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ha rango r e se $r = n$, la matrice $A^H A$ è non singolare. Viceversa se $A^H A$ è non singolare, allora $m \geq n$ e il rango di A è massimo.

1.19 Definizione. Siano $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^m$; si definisce *sistema lineare di m equazioni in n incognite* il sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{8}$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ è il vettore delle incognite, A è la *matrice del sistema* e $\mathbf{b}$ è il *vettore dei termini noti.* Il sistema si dice *consistente* se ha almeno una soluzione. ■

1.20 Teorema. *Le seguenti condizioni sono equivalenti*:

a) *il sistema (8) è consistente*,

b) $\mathbf{b} \in S(A)$,

c) *la matrice A e la matrice $[A|\mathbf{b}]$, ottenuta aggiungendo il vettore $\mathbf{b}$ alle colonne di A, hanno lo stesso rango.* ■

Se il sistema (8) è consistente e $\mathbf{x}$ è una sua soluzione, allora ogni soluzione di (8) può essere espressa come $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, dove $\mathbf{y}$ è tale che $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{y} \in N(A)$. Perciò la soluzione è unica se e solo se $\dim N(A) = 0$.

Vi sono vari casi possibili:

1. Se $n = m$, e la matrice A è non singolare, allora $S(A) = \mathbf{C}^n$ e $N(A) = \{\mathbf{0}\}$. Quindi il sistema è consistente, la soluzione è unica ed è data da

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

e mediante la *regola di Cramer* può essere così espressa

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo alla i-esima colonna il vettore $\mathbf{b}$. Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (sistema *omogeneo*), il sistema ha la sola soluzione nulla.

Se invece la matrice A è singolare, il sistema può non essere consistente. Il sistema è comunque consistente se è omogeneo, perché aggiungendo il vettore $\mathbf{b}$ nullo alla matrice A si ottiene una matrice con lo stesso rango.

2. Se $m < n$, cioè vi sono più incognite che equazioni, il sistema, se è consistente, ha infinite soluzioni in quanto $\dim S(A) \leq m$ e quindi $\dim N(A) \geq n - m > 0$.

3. Se $n < m$, cioè vi sono più equazioni che incognite, il sistema può essere consistente solo se vi sono almeno $m - n$ equazioni che sono combinazioni lineari delle altre.

7. Matrici a blocchi

Spesso è conveniente descrivere una matrice in termini di sue sottomatrici anziché in termini dei suoi elementi. Ad esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

può essere così descritta in modo più compatto

$$A = \begin{bmatrix} I_2 & E \\ & \\ E^T & I_3 \end{bmatrix},$$

dove $E \in \mathbf{R}^{2\times 3}$ è la matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dice allora che la matrice A è *partizionata a blocchi* o anche che A è una matrice 2×2 a blocchi. In generale una matrice $p\times q$ a blocchi è una matrice della forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{bmatrix},$$

dove $A_{ij} \in \mathbf{C}^{m_i\times n_j}$, e m_i, n_j sono interi positivi, per $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, e quindi $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, con

$$m = \sum_{i=1}^{p} m_i, \quad n = \sum_{j=1}^{q} n_j.$$

Un caso frequente è quello in cui alcuni blocchi sono vettori riga o colonna, come ad esempio per la matrice $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{v}^H \\ & \\ \mathbf{u} & B \end{bmatrix}$$

dove $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^{n-1}$, $B \in \mathbf{C}^{(n-1)\times(n-1)}$.

Alle matrici a blocchi si possono estendere molte delle definizioni date nei precedenti paragrafi. Ad esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O & O \\ A_{21} & A_{22} & O \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

è detta *triangolare inferiore a blocchi.* L'operazione di moltiplicazione fra due matrici A e B a blocchi può essere descritta in termini di prodotti righe per colonne di blocchi. Ad esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ & \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ & \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

sono matrici 2×2 a blocchi tali che $C = AB$, allora vale

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Tale proprietà vale nel caso generale di matrici a blocchi, purché il numero dei blocchi e le loro dimensioni siano compatibili.

8. Matrici riducibili

1.21 Definizione. Una matrice A di ordine $n \geq 2$ si dice *riducibile* se esiste una matrice di permutazione Π e un intero k, $0 < k < n$, tale che

$$B = \Pi A \Pi^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} & k \text{ righe} \\ & \\ \} & n-k \text{ righe} \end{matrix} \tag{9}$$

in cui $A_{11} \in \mathbf{C}^{k\times k}$ e $A_{22} \in \mathbf{C}^{(n-k)\times(n-k)}$. Se la matrice A non è riducibile, si dice che A è *irriducibile.* ∎

Se una matrice A è riducibile, possono esistere più matrici di permutazione Π che consentono di trasformare la matrice A in una matrice B

della forma (9). Se la matrice A del sistema lineare (8) è riducibile, poiché la matrice Π in (9) è ortogonale, risulta

$$\Pi A \Pi^T \Pi \mathbf{x} = \Pi \mathbf{b},$$

e ponendo $\mathbf{y} = \Pi \mathbf{x}$ e $\mathbf{c} = \Pi \mathbf{b}$, si ha

$$B\mathbf{y} = \mathbf{c}.$$

Partizionando i vettori

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \quad k \text{ componenti} \\ \\ \} \; n-k \, \text{componenti} \end{matrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \quad k \text{ componenti} \\ \\ \} \; n-k \, \text{componenti} \end{matrix}$$

dove $\mathbf{y}_1,\ \mathbf{c}_1 \in \mathbf{C}^k, \mathbf{y}_2,\ \mathbf{c}_2 \in \mathbf{C}^{n-k}$, il sistema (8) si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} A_{11}\,\mathbf{y}_1 + A_{12}\,\mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_1 \\ \\ \qquad A_{22}\,\mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2. \end{cases}$$

La risoluzione del sistema (8) con matrice dei coefficienti di ordine n è così ricondotta alla risoluzione di due sistemi, il primo con matrice dei coefficienti di ordine $n-k$, il secondo con matrice dei coefficienti di ordine k.

Per determinare se una matrice A è riducibile, si può utilizzare il *grafo orientato* associato ad A, cioè un grafo che ha tanti nodi p_i, quant'è l'ordine di A, ed ha un arco orientato da p_i (nodo di partenza) a p_j (nodo di arrivo) per ogni elemento a_{ij} non nullo di A.

1.22 Esempio. Il grafo associato alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \text{-1} \\ \text{-1} & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

è riportato nella figura 1.3. ∎

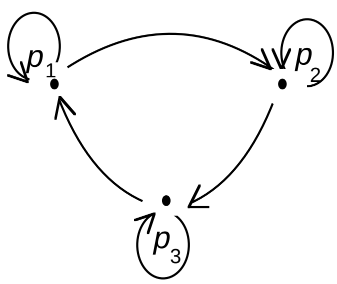

Fig. 1.3 - Grafo orientato associato alla matrice (10).

Due archi di un grafo orientato si dicono *contigui* se il nodo di arrivo del primo è il nodo di partenza del secondo. Una successione di archi orientati contigui si dice *cammino orientato.* Un cammino orientato si dice *chiuso* se il nodo di partenza del primo arco del cammino coincide con il nodo di arrivo dell'ultimo arco.

1.23 Definizione. Un grafo orientato si dice *fortemente connesso* se per ogni coppia di indici i, j, $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$, esiste un cammino orientato che parte dal nodo p_i e arriva al nodo p_j. ∎

1.24 Teorema. *Una matrice A è riducibile se e solo se il suo grafo orientato non è fortemente connesso.*

Dim. Si noti che il grafo orientato della matrice A e quello della matrice $B = \Pi A \Pi^T$ differiscono solamente per la diversa numerazione degli indici dei nodi p_i. Se la matrice A è riducibile, considerando la matrice B della (9) e un indice i, con $k < i \leq n$, risulta che non vi può essere alcun cammino che partendo dal nodo p_i arrivi ad un nodo p_j, $j \leq k$. Viceversa, se il grafo di A non è fortemente connesso, esiste un nodo p_j a partire dal quale non è possibile raggiungere almeno un altro nodo del grafo. Si indica con $\mathcal{P}$ l'insieme dei nodi che sono raggiungibili a partire da p_j e con $\mathcal{Q}$ l'insieme dei nodi che non sono raggiungibili a partire da p_j. Gli insiemi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ costituiscono una partizione dell'insieme dei nodi e $\mathcal{Q}$ è non vuoto. Inoltre non esistono cammini orientati che partendo da un nodo di $\mathcal{P}$ raggiungano nodi di $\mathcal{Q}$. Si riordinano i nodi, in modo tale che $\mathcal{Q} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, con $k \geq 1$, e $\mathcal{P} = \{p_{k+1}, \ldots, p_n\}$. La matrice B ottenuta permutando conseguentemente righe e colonne di A è tale che $b_{ij} = 0$ se $i > k$ e $j \leq k$. ∎

Dal teorema 1.24 segue che se la matrice A è irriducibile, allora esiste un cammino orientato chiuso che tocca tutti i nodi del grafo.

1.25 Esempio. Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

per verificare se la matrice A è riducibile, se ne disegna il grafo orientato, riportato in figura 1.4:

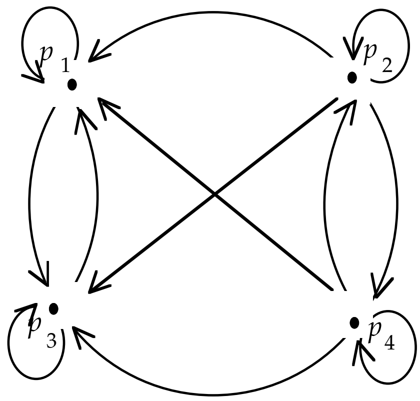

Fig. 1.4 - Grafo orientato associato alla matrice (11).

In questo grafo

al nodo p_1 arrivano cammini orientati provenienti dai nodi p_1, p_2, p_3, p_4;

al nodo p_2 arrivano cammini orientati provenienti dai nodi p_2, p_4;

al nodo p_3 arrivano cammini orientati provenienti dai nodi p_1, p_2, p_3, p_4;

al nodo p_4 arrivano cammini orientati provenienti dai nodi p_2, p_4.

Ne segue che scambiando fra loro i nodi p_1 e p_4, e mettendo così in testa i due nodi a cui non si arriva provenendo dagli altri due, la matrice di permutazione associata

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

è tale che risulta

$$B = \Pi A \Pi^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo allora i due sistemi

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}_2,$$

si ottiene la soluzione

$$\mathbf{y} = [-1, \, -1, \, 0, \, 1]^T,$$

da cui

$$\mathbf{x} = \Pi^T \mathbf{y} = [1, \, -1, \, 0, \, -1]^T. \qquad \blacksquare$$