È possibile dimostrare il teorema di Cayley-Hamilton, usando la forma canonica di Jordan, introdotta dal Teorema 2.18.

2.5 Teorema (di Cayley-Hamilton). *Sia $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ e sia $P(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico. Allora*

$$P(A) = 0.$$

Dim. Sia J la forma canonica di Jordan di A, ovvero, per S invertibile si ha

$$S^{-1}AS = J = \operatorname*{diag}_{i=1,p}(J_i),$$

dove

$$J_i = \operatorname*{diag}_{j=1,\tau(\lambda_i)}(C_i^{(j)}),$$

$$C_i^{(j)} = \lambda_i I_{\nu_i^{(j)}} + U_{\nu_i^{(j)}}, \quad U_{\nu_i^{(j)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{\tau(\lambda_i)} \nu_i^{(j)} = \sigma(\lambda_i),$$

come risulta dal Teorema 2.18. Si ha allora

$$P(A) = P(SJS^{-1}) = SP(J)S^{-1}.$$

Si dimostra che $P(J) = O$, infatti

$$P(J) = \operatorname*{diag}_{i=1,p}(P(J_i)), \quad P(J_i) = \operatorname*{diag}_{j=1,\tau(\lambda_i)}(P(C_i^{(j)})),$$

e, per ogni i e j,

$$P(C_i^{(j)}) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (C_i^{(j)} - \lambda_k I_{\nu_i^{(j)}})^{\sigma(\lambda_k)} = O,$$

dal momento che, essendo $\sigma(\lambda_i) \geq \nu_i^{(j)}$ per ogni j, risulta

$$(C_i^{(j)} - \lambda_i I_{\nu_i^{(j)}})^{\sigma(\lambda_i)} = U_{\nu_i^{(j)}}^{\sigma(\lambda_i)} = O.$$

∎