Capitolo 4

Approssimazione

4.1 Richiami di teoria

Prerequisiti: nozioni elementari di calcolo differenziale e integrale.

Interpolazione

• Il problema dell'interpolazione è un caso particolare del vasto settore dell'approssimazione di funzioni. Si suppone che di una funzione $f(x)$ siano noti i valori assunti su un insieme di $n+1$ **nodi** distinti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, appartenenti ad un intervallo $[a, b]$. Si vuole determinare un polinomio $p(x)$ di grado al più n che assuma gli stessi valori della funzione data, cioè che soddisfi la condizione $p(x_i) = f(x_i)$, per $i = 0, \ldots, n$.

• Sia

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

il polinomio cercato. Il vettore $\boldsymbol{a} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]^T$ dei suoi coefficienti può essere calcolato risolvendo il sistema

$$V \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f},$$

dove $\boldsymbol{f}$ è il vettore dei valori della $f(x)$ nei nodi, cioè $[f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)]^T$ e V è la matrice, detta di **Vandermonde**, i cui elementi sono

$$v_{ij} = x_{i-1}^{j-1}, \quad i = 1, \ldots n+1, \ j = 1, \ldots, n+1.$$

La matrice di Vandermonde è non singolare, in quanto

$$\det\ V = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j),$$

quindi il polinomio $p(x)$ esiste ed è unico. Questo procedimento con cui si calcolano i coefficienti di $p(x)$ non è conveniente perché la matrice di Vandermonde può essere malcondizionata anche per valori piccoli di n, soprattutto nel caso frequente in cui i nodi sono punti equidistanti.

- Il polinomio di interpolazione può essere rappresentato anche nella forma di **Lagrange**

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x),$$

dove

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, \ldots, n.$$

- Nel caso dell'**interpolazione lineare**, il polinomio di grado al più 1 che assume nei punti x_0, x_1, distinti tra loro, rispettivamente i valori $f(x_0)$, $f(x_1)$ è

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \, f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \, f(x_1).$$

- Il costo computazionale del polinomio di Lagrange per calcolare il valore $p(x)$ in un punto x diverso dai nodi, è di $n^2/2$ operazioni additive e n^2 operazioni moltiplicative. Quando i punti x_i sono equidistanti il costo si riduce a $2n$ operazioni additive e $3n$ operazioni moltiplicative.
- Si definisce **resto** dell'interpolazione di $f(x)$ con il polinomio $p(x)$ la funzione

$$r(x) = f(x) - p_n(x)$$

che assume il valore zero nei nodi x_i. Se la funzione $f(x)$ è derivabile con continuità fino all'ordine $n+1$ in un intervallo $[a, b]$ che contenga tutti i nodi, esiste un punto $\xi = \xi(x) \in (a, b)$, tale che

$$r(x) = \pi(x) \, \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

dove $\pi(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$. Quindi si ha

$$r_{\max} = \max_{x \in [a,b]} |r(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |\pi_n(x)| \, \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{dove} \quad M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Nel caso dell'interpolazione lineare è

$$|r(x)| \leq \frac{M_2 |x_1 - x_0|^2}{8}.$$

- Se i nodi x_i sono equidistanti con passo h, ponendo $x = x_0 + th$, si ha

$$\pi_n(x) = \tau_n(t) \, h^{n+1},$$

dove $\tau_n(t) = t(t-1) \ldots (t-n)$. Studiando il comportamento di $\tau_n(t)$ si vede che i massimi relativi di $|\tau_n(t)|$ in ogni intervallo $(i, i+1)$ crescono quando ci si allontana dal centro dell'intervallo $[0, n]$ verso gli estremi. Quindi se $f^{(n+1)}(x)$ non varia molto nell'intervallo $[x_0, x_n]$, il resto risulta minore nella parte centrale dell'intervallo e il massimo di $|\tau_n(t)|$ viene assunto nel primo e nell'ultimo sottointervallo.

• Se della funzione $f(x)$ sono noti molti valori un polinomio di grado basso che la approssimi può essere trovato mediante il metodo dei minimi quadrati. Tale polinomio, a differenza di quello di interpolazione, non assume gli stessi valori della $f(x)$ nei nodi. Ma questo è ragionevole se i valori $f(x_i)$ sono ottenuti sperimentalmente e quindi sono affetti da errore.

Integrazione approssimata

• Il polinomio di interpolazione consente anche di affrontare il problema dell'approssimazione dell'integrale

$$S = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Usando il polinomio di interpolazione lineare sui nodi $x_0 = a$ e $x_1 = b$ si ottiene la formula di quadratura dei **due punti**

$$S_2 = \frac{b-a}{2}\ [f(x_0) + f(x_1)].$$

Usando il polinomio di interpolazione di grado 2 sui nodi $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ e $x_2 = b$, si ottiene la formula di quadratura dei **tre punti**

$$S_3 = \frac{b-a}{3}\ [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

• Se $f(x)$ è derivabile con continuità due volte, il resto dell'approssimazione di S con la formula dei due punti è

$$r_2 = S - S_2 = -\frac{h^3}{12}\ f''(\xi),$$

dove ξ è un opportuno punto in (a, b) e $h = b - a$. Poiché la derivata seconda di un polinomio di grado minore o uguale a 1 è identicamente nulla, la formula dei due punti integra esattamente i polinomi di grado minore o uguale a 1 (si dice che ha **grado di precisione** 1).

• Se $f(x)$ è derivabile con continuità quattro volte, il resto dell'approssimazione di S con la formula dei tre punti è

$$r_2 = S - S_3 = -\frac{h^5}{90}\ f^{(4)}(\xi),$$

dove ξ è un opportuno punto in (a, b) e $h = (b - a)/2$. Poiché la derivata quarta di un polinomio di grado minore o uguale a 3 è identicamente nulla, la formula dei tre punti integra esattamente i polinomi di grado minore o uguale a 3 (cioè ha grado di precisione 3).

• Nella pratica, per risolvere il problema dell'approssimazione di un integrale con un errore che non superi in modulo una tolleranza prefissata $\epsilon > 0$, si utilizzano le formule **composte**, che si ottengono mediante applicazione ripetuta delle formule dei due o tre punti, suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in N sottointervalli mediante i punti equidistanti z_k, $k = 0, \ldots, N$, tali che $z_0 = a$ e $z_N = b$. Applicando la formula dei due punti si ottiene la formula **dei trapezi**

$$S_2^{(N)} = \frac{b-a}{2N} \Big[f(z_0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(z_k) + f(z_N) \Big],$$

il cui resto, supponendo che $f(x)$ sia derivabile con continuità due volte, è

$$R_2^{(N)} = -\frac{(b-a)^3}{12\ N^2}\ f''(\xi),$$

dove ξ è un opportuno punto in (a, b). Poiché $|f''(x)|$ è limitata in $[a, b]$, risulta

$$\lim_{N \to \infty} |R_2^{(N)}| = 0,$$

quindi per ogni prefissata tolleranza $\epsilon > 0$, è sempre possibile determinare un N tale che

$$|R_2^{(N)}| \le \epsilon.$$

- Se invece si applica la formula dei tre punti si ottiene la formula di **Cavalieri-Simpson**

$$S_3^{(N)} = \frac{b-a}{6N} \Big[f(z_0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(z_k) + 4 \sum_{k=0}^{N-1} f\Big(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}\Big) + f(z_N) \Big],$$

il cui resto, supponendo che $f(x)$ sia derivabile con continuità quattro volte, è

$$R_3^{(N)} = -\frac{(b-a)^5}{2880\ N^4}\ f^{(4)}(\xi).$$

Quindi anche per questa formula per ogni prefissata tolleranza $\epsilon > 0$, è sempre possibile determinare un N tale che

$$|R_3^{(N)}| \le \epsilon.$$

- Il procedimento per la determinazione di un valore adeguato di N si basa sull'espressione del resto della formula e richiede lo studio preliminare della derivata seconda o quarta di $f(x)$. Se questo studio è eccessivamente pesante, si può dare una stima del resto in modo più pratico, confrontando fra loro le approssimazioni dell'integrale ottenute con due diversi valori di N. Di solito si confrontano i valori ottenuti per N e per $2N$, perché questo consente di sfruttare nel secondo calcolo i valori della funzione già utilizzati per il primo. Su queste stime si basa un procedimento di **estrapolazione di Richardson**.

4.2 Esercizi svolti

4.2.1 Sono assegnati i tre punti $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$. Quanti polinomi di grado esattamente 1 interpolano i tre punti? Quanti polinomi di grado esattamente 2 interpolano i tre punti? Quanti polinomi di grado esattamente 3 interpolano i tre punti? (26/6/2002)

Soluzione

Come è noto dalla teoria vi è un solo polinomio di grado minore o uguale a 2 che interpola tre punti dati. In questo caso i punti sono allineati, quindi il polinomio di interpolazione $p(x) = x + 1$ ha grado esattamente uno. Perciò non esiste alcun polinomio di grado esattamente due che interpoli i tre punti. Di grado esattamente tre ve ne sono infiniti $q_k(x) = x + 1 + k(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ con $k \neq 0$.

4.2.2 È data la funzione

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2.$$

a) Si scrivano il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e il resto $r(x) = f(x) - p(x)$.

b) Si dia una maggiorazione di $|r(x)|$ per $x \in [0, 3]$. (18/12/2002)

Soluzione

a) I valori della $f(x)$ nei nodi sono

$$f(x_0) = -2, \quad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = 7.$$

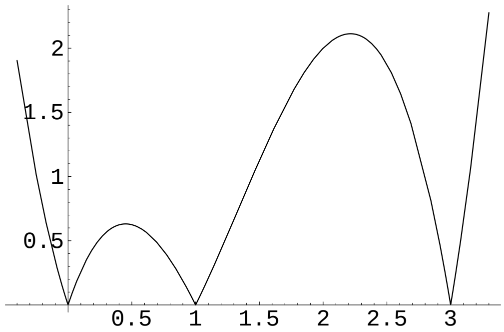
Usando il polinomio di Lagrange si ha

$$\begin{aligned} p(x) &= -2L_0(x) + L_1(x) + 7L_2(x) \\ &= -2\,\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + 7\,\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= 3x - 2. \end{aligned}$$

In questo caso è equivalente ricavare $r(x)$ come differenza di $f(x)$ e $p(x)$ oppure utilizzare la formula del teorema: infatti $f^{(3)}(x) = 6$, e quindi otteniamo $r(x) = \pi(x)$, cioè

$$r(x) = f(x) - p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x - 1)(x - 3).$$

b) Il grafico di $|r(x)|$ è



Quindi

$$\max_{x\in[0,3]} |r(x)| = \max_{x\in(1,3)} (-r(x)).$$

Nell'intervallo $(1,3)$ la funzione $-r(x)$ è derivabile e $r'(x) = 0$ per $x = (4+\sqrt{7})/3$ e si ha

$$-r\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{20+14\sqrt{7}}{27} \sim 2.12$$

da cui abbiamo $|r(x)| \leq 2.12$ per $x \in [0,3]$.

4.2.3 Sia $f(x) = x^2 - x - 2$.

a) Si determini il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$ e $x_1 = k$, con $k \in [0,2]$.

b) Detto

$$r_{\max} = \max_{0\leq x\leq 2} |r(x)|,$$

($r_{\max}$ è funzione di k), si determini il valore di $k \in [0,2]$ per cui $r_{\max}$ risulta minimo. (7/2/2003)

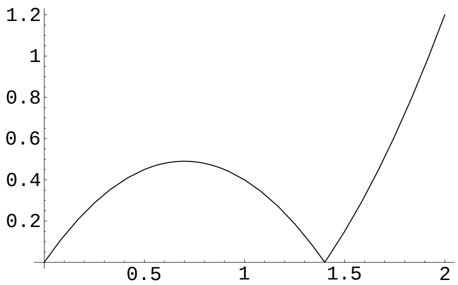
Soluzione Il polinomio di interpolazione risulta

$$p(x) = (k-1)x - 2,$$

e quindi

$$r_{\max} = \max_{0\leq x\leq 2} |f(x) - p(x)| = \max_{0\leq x\leq 2} |x(x-k)|.$$

Il grafico di $y = |x(x-k)|$ per un valore di k (la figura si riferisce al valore $k = 1.4$) risulta



quindi

$$r_{\max} = \max\{r(2), \max_{0\le x\le k}(-r(x))\}.$$

Nell'intervallo $(0,k)$ la funzione $-r(x)$ è derivabile e $r'(x) = 0$ per $x = k/2$ e si ha $\max_{0\le x\le k}(-r(x)) = k^2/4$. Perciò

$$r_{\max} = \max\{2(2-k), k^2/4\}.$$

Al crescere di k il punto di cuspide si sposta a destra, il massimo fra 0 e k aumenta e $r(2)$ diminuisce. Il minimo di $r_{\max}$ si ha quando i due termini hanno lo stesso valore, cioè quando $2(2-k) = k^2/4$, ovvero $k = 4\sqrt{2} - 4$ e risulta $12 - 8\sqrt{2}$.

4.2.4 Sono dati la funzione $f(x) = \log_2 x$ e i nodi $x_0 = 1/2$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione.

b) Si scriva la formula del resto e se ne dia una maggiorazione M per $x \in [x_0, x_2]$.

c) Si determini il
$$\max_{x\in[x_0,x_2]} |f(x) - p(x)|$$
e lo si confronti con M. (17/12/2003)

Soluzione

a) I valori della $f(x)$ nei nodi sono

$$f(x_0) = -1, \quad f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 1.$$

Usando il polinomio di Lagrange si ha

$$\begin{aligned} p(x) &= -L_0(x) + L_2(x) = -\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= -\frac{2}{3}\,x^2 + 3x - \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

b) Posto $\pi_2(x) = (x-1/2)(x-1)(x-2)$, si ha

$$r(x) = \pi_2(x)\,\frac{f'''(\xi)}{3!}, \qquad \text{con} \quad \xi \in (1/2, 2).$$

Poiché $f'''(x) = \log_2 e \dfrac{2}{x^3}$, si ha

$$\max_{x\in(1/2,2)} |f'''(x)| = f'''(1/2) = 16\log_2 e \sim 23.08,$$

$$\max_{x\in(1/2,2)} |\pi_2(x)| = -\pi_2\Big(\frac{7+\sqrt{7}}{6}\Big) \sim 0.26.$$

Quindi $|r(x)| < 1.02$.

c) È

$$r(x) = f(x) - p(x) = \log_2 x + \frac{2}{3}\,x^2 - 3x + \frac{7}{3}, \quad r'(x) = \frac{4}{3}\,x - 3 + \frac{1}{x}\log_2 e,$$

e $r'(x) = 0$ nei punti $x_1 = \dfrac{9 - \sqrt{81 - 48\log_2 e}}{8}$ e $x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{81 - 48\log_2 e}}{8}$.
Quindi

$$\max_{x \in [x_0, x_2]} |r(x)| = -r(x_2) \sim 0.083.$$

4.2.5 Sono dati i punti

$$y_1 = -4, \quad y_2 = 2, \quad y_i = 2y_{i-1} - y_{i-2} \quad \text{per} \quad i = 3,\ 4.$$

Si scriva il polinomio di interpolazione dei punti dati e se ne disegni il grafico. Si verifichi che il polinomio trovato è di interpolazione anche per i punti y_i con $i > 4$. (25/6/2008)

Soluzione

Il polinomio cercato $p(i)$ deve soddisfare alle condizioni

$$p(1) = -4, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 8, \quad p(4) = 14.$$

Disegnando su grafico questi punti si vede che sono allineati. Quindi il polinomio di interpolazione è di primo grado. Perciò basta trovare il polinomio lineare che interpola i primi due punti. Risulta

$$p(i) = 6\,i - 10.$$

Il grafico di $p(i)$ è una retta. La verifica che $p(i)$ interpola anche i punti y_i per $i > 4$ viene fatta per induzione. Si suppone che l'espressione trovata valga in tutti i punti precedenti all'i-esimo e si sostituisce nell'equazione data, per verificare che l'espressione vale anche nell'i-esimo punto. Infatti si ha

$$2\,p(i-1) - p(i-2) = 2(6(i-1) - 10) - (6(i-2) - 10) = 6\,i - 10 = p(i).$$

4.2.6 Sono assegnati i tre punti $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(3, k)$.

a) Si calcoli la retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

b) Per quale valore di k la retta di approssimazione diventa retta di interpolazione? (6/6/2002)

Soluzione

a) Risolvendo il sistema delle equazioni normali

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+k \\ 3k \end{bmatrix},$$

si ottiene $a_0 = (10-k)/7$ e $a_1 = (5k-8)/14$, quindi la retta cercata è

$$p(x) = \frac{5k-8}{14}\,x + \frac{10-k}{7}\,.$$

b) Imponendo il passaggio della retta di approssimazione per esempio per $(0,2)$, si trova $k=-4$ e quindi $a_0=-2$ e $a_1=2$. Si verifica subito che la retta così ottenuta passa anche per $(1,0)$ e $(3,-4)$.

4.2.7 Si approssima

$$S = \int_0^1 \sin(x^2)\; dx$$

utilizzando la formula dei trapezi. Quale è il numero di intervalli N in cui deve essere diviso l'intervallo $[0,1]$ per approssimare S con errore assoluto in modulo minore di 10^{-4}? (17/1/2003)

Soluzione

Il resto della formula dei trapezi risulta

$$R_2^{(N)} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi).$$

$f'(x) = 2x\cos(x^2)$ e $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$. Osserviamo che $|f''(x)|$ è limitata in $[0,1]$, ed in particolare $|f''(x)| \le |f''(1)| \sim 2.29$. Quindi

$$|R_2^{(N)}| \le \frac{2.29}{12N^2} = \frac{0.19}{N^2},$$

Imponendo che la maggiorazione del resto sia minore di 10^{-4} otteniamo $N \ge 44$.

4.2.8 Si approssima l'integrale

$$\int_5^{10} \log x\; dx$$

con le formule dei trapezi e di Cavalieri-Simpson, suddividendo l'intervallo di integrazione in $N=10$ sottointervalli. Si dia una maggiorazione del resto in valore assoluto nei due casi. (20/1/2004)

Soluzione

Si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},$$

perciò nell'intervallo di integrazione $[5, 10]$ è

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{5^2}, \qquad |f^{(4)}(x)| \leq \frac{6}{5^4}.$$

Maggiorando i resti si ha

$$|R_2^{(N)}| \leq \frac{5^3}{5^2\ 12N^2} = \frac{5}{12N^2}, \qquad |R_3^{(N)}| \leq \frac{5^5}{5^4\ 2880N^4} = \frac{1}{96N^4}$$

e

$$|R_2^{(10)}| \leq \frac{5}{1200} \sim 0.0042, \qquad |R_3^{(10)}| \leq \frac{1}{960000} \sim 10^{-6}.$$

4.3 Esercizi proposti

4.3.1 a) Si calcoli il polinomio di interpolazione dei punti $(-1, 6)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$.

b) Si sfrutti il risultato in a) per determinare il polinomio di interpolazione dei punti $(-1, 1)$, $(2, -5)$, $(3, -3)$.

c) Come si può generalizzare il risultato ottenuto in b)? (14/2/2002)

4.3.2 Si consideri la seguente tabella

x_i	-2	-1	1	2
y_i	2	1	1	2

a) Si scriva il polinomio di interpolazione.

b) Si aggiungano le coppie di punti $(-3, k)$ e $(3, k)$, con k parametro. Si determini il valore di k per cui il polinomio di interpolazione ha grado minimo. (9/7/2003)

4.3.3 È data la funzione

$$f(x) = x(x-1)(x-3)$$

a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x)$ nei nodi $x_0 = 1/2$, $x_1 = 3/2$ e $x_2 = 5/2$.

b) Siano f_m e p_m i valori minimi rispettivamente di $f(x)$ e di $p(x)$ nell'intervallo $[0, 3]$. Si dica che errore si commette se si approssima f_m con p_m. (6/7/2004)

4.3.4 Si consideri la successione generata dalla ricorrenza

$$y_i = y_{i-1} + i, \quad \text{con} \quad y_0 = 0.$$

Usando la formula di Lagrange, si costruisca il polinomio di interpolazione dei primi 3 elementi della successione e si verifichi che tale polinomio fornisce il valore di y_i per tutti gli interi i. (3/9/2008)

4.3.5 È noto che le seguenti funzioni di n

$$s(n) = \sum_{i=1}^{n} i \quad \text{e} \quad t(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

sono entrambe polinomi in n, ed esattamente $s(n)$ di grado 2 e $t(n)$ di grado 4.

a) Si determini $s(n)$ come polinomio di interpolazione a partire dai valori assunti per $n = 1$, 2, 3. Si verifichi che $s^2(n) = t(n)$ per $n = 1$, 2, 3, 4, 5.

b) È $t(n) = s^2(n)$ per ogni n? Perché? (21/12/2004)

4.3.6 Sia $f(x) = x^n$, con $n \geq 4$, $x \in [0, 1]$. Si indichi con $p_m(x)$ il polinomio di interpolazione di grado al più m di $f(x)$ sui nodi $x_i = i/m$ con $i = 0, 1, \ldots, m$.

a) Si determini il polinomio $p_2(x)$.

b) Per $m = n - 1$ si scriva il resto dell'interpolazione e lo si usi per determinare $p_m(x)$.

c) Si scriva $p_n(x)$. (4/6/2003)

4.3.7 Sia $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Si scriva il polinomio $p_1(x)$ di interpolazione nei nodi $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$ e si dica qual è il segno di $r_1(x) = f(x) - p_1(x)$ per $x \in [1, 4]$.

b) Si scriva il polinomio $p_2(x)$ di interpolazione nei nodi $x_0 = 16/9$, $x_1 = 9/4$ e si dica qual è il segno di $r_2(x) = f(x) - p_2(x)$ per $x \in [1, 4]$.

c) Sfruttando $p_1(x)$ e $p_2(x)$ si determinino a e b tali che $a < \sqrt{3.5} < b$. (10/2/2004)

4.3.8 È data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione nei nodi $x_i = i$, per $i = 0, 1, 2$.

b) Sia $r(x) = f(x) - p(x)$. Si confronti una maggiorazione di $|r(x)|$ ottenuta sfruttando il teorema con una maggiorazione ottenuta studiando $r(x)$. (15/6/2004)

4.3.9 $p(x) = 2x^2 + 3$ è il polinomio di interpolazione di una funzione $f(x)$ nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

a) Sapendo che $f(x)$ è un polinomio di 3^o grado che si annulla in 2, si determini $f(x)$.

b) Si trovi il massimo modulo del resto nell'intervallo $[-1, 2]$. (1/7/2005)

4.3.10 Sono assegnati i tre nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_2 = 2$ e le funzioni

$$f(x) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} x \quad \text{e} \quad g(x) = (x-1)^4.$$

a) Si calcoli il polinomio di interpolazione delle due funzioni sui nodi assegnati.

b) Si trovino maggiorazioni per i moduli dei due resti nell'intervallo $[0, 2]$.

c) Si aggiungono ai nodi iniziali i due nodi $x_3 = \frac{1}{2}$ e $x_4 = \frac{3}{2}$. Si dica, senza eseguire calcoli, quale diventa il polinomio di interpolazione della funzione $g(x)$ ed il relativo resto.

d) Scelti $n + 1$ nodi equidistanti in $[0, 2]$ si indichi con $p_n(x)$ il polinomio di interpolazione della funzione $f(x)$ su tali nodi. Si dimostri che la successione dei polinomi $p_n(x)$ converge ad $f(x)$. (18/12/2001)

4.3.11 Sia $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/k^2$, $x_2 = 1$, dove k è un intero maggiore di 1.

b) Posto $r(x) = f(x) - p(x)$, si disegni un grafico approssimativo di $|r(x)|$ per $x \in (0, 1]$ nel caso $k = 3$.

c) Calcolando il $\lim\limits_{k\to\infty} |r(1/2)|$ si verifichi che $|r(x)|$ non è superiormente limitato per $x \in [0, 1]$ al crescere di k. Tenendo conto del teorema del resto, si dia una spiegazione di questo fatto. (13/1/2005)

4.3.12 Sia $f(x) = \cos(2\pi x)$.

a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione della $f(x)$ nei nodi $x_0 = 1/4$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/2$.

b) Si determini una limitazione superiore di $|r(x)| = |f(x) - p(x)|$ sull'intervallo $[0, 1/2]$ sfruttando il teorema del resto. (12/6/2006)

4.3.13 Sia $f(x) = 1/x^2$. Si costruisca il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x)$ nei punti $x = 2$ e $x = 3$. Si dica quant'è il

$$\max_{x\in[2,3]} |f(x) - p(x)|$$

e lo si confronti con la maggiorazione del modulo del resto data dal teorema. (11/7/2008)

4.3.14 a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione dei punti $(1,1)$, $(2,0)$ e $(3,0)$.

b) Si determini il parametro k in modo che il polinomio

$$q(x) = p(x) + k\,(x-1)(x-2)(x-3)$$

passi per $(4,2)$. Si dica se $q(x)$ è il polinomio di interpolazione dei 4 punti $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,0)$ e $(4,2)$.

c) Si assuma che il polinomio $q(x)$ interpoli sui nodi 1, 2, 3, 4 una funzione $f(x)$ per cui è noto che $\max\limits_{[1,4]} |f^{(n)}(x)| \le 2n$. Posto $r(x) = f(x) - q(x)$, si dia una maggiorazione di $\max\limits_{[1,4]} |r(x)|$. (19/12/2006)

4.3.15 a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di grado minimo passante per i punti $(1,1)$, $(2,0)$ e $(4,0)$.

b) Si scriva il polinomio $q(x)$ di grado minimo passante per i punti $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$.

c) Si scriva il resto di $p(x)$ e $q(x)$ nel caso che la funzione approssimata sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad 0 \le x \le 1.5, \\ 0 & \text{per} \quad 1.5 < x \le 5. \end{cases}$$

Quale dei due polinomi approssima meglio la $f(x)$ nell'intervallo $[0,5]$? (7/6/2007)

4.3.16 È data la funzione $f(x) = \sqrt{|x-1|}$, per $x \in [0,2]$.

a) Si determini il polinomio $p(x)$ di interpolazione sui nodi $x_i = i$ per $i = 0, 1, 2$.

b) Si determini una maggiorazione di $|f(x) - p(x)|$. (19/7/2007)

4.3.17 Sia $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) Si calcoli il polinomio $p(x)$ di interpolazione nei tre nodi $x_i = 1+i$ per $i = 0, 1, 2$.

b) Si dia una maggiorazione del modulo del resto $r(x) = f(x) - p(x)$ per $x \in [x_0, x_2]$. (20/12/2007)

4.3.18 Sono assegnati i nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

a) Si scriva il polinomio di interpolazione della funzione $f(x) = x^2 + \sin(\pi x)$. Si calcoli il resto e se ne ottenga una maggiorazione nell'intervallo $[-1,1]$.

b) Si scriva il polinomio di interpolazione della funzione $f(x) = x^3 + \sin(\pi x)$. Si calcoli il resto e se ne ottenga una maggiorazione nell'intervallo $[-1,1]$. (13/9/2007)

4.3.19 Per la funzione $f(x) = x(x^2 - 1)$ si scrivano

a) il polinomio $p_1(x)$ di interpolazione nei punti $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e il corrispondente resto $r_1(x)$;

b) il polinomio $p_2(x)$ di interpolazione nei punti $x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e il corrispondente resto $r_2(x)$;

c) si confrontino il $\max\limits_{-1\le x\le 1} |r_1(x)|$ e il $\max\limits_{-1\le x\le 1} |r_2(x)|$. (17/1/2008)

4.3.20 Dato $k > 0$ si scriva, usando la formula di Lagrange, il polinomio $p(x)$ che si annulla nei punti $-2,\ -1,\ 1,\ 2$ e vale k in 0. Si determini

$$M = \max_{x\in[-2,2]} |p(x)|$$

e si dica come varia M al variare di k. (9/6/2008)

4.3.21 È data una funzione $f(x)$.

a) Si scriva il polinomio di secondo grado che assume gli stessi valori della $f(x)$ nei punti $x_0 = -1$ e $x_1 = 0$ e ha la stessa tangente della $f(x)$ nel punto $x_2 = 1$.

b) Si studi il resto nel caso della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$. (21/7/2005)

4.3.22 Sia $f(x) = \sqrt{1-x}$, e si considerino i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 9/25$ e $x_2 = 1$.

a) Si determini il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ sui nodi x_i, $i = 0, 1, 2$.

b) Si confronti il valore di $p(1/2)$ con il valore ottenuto approssimando $f(1/2)$ con la formula di Taylor nell'intorno di 0 arrestata al secondo ordine, ovvero sfruttando che $f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + 1/2\, f''(0)\, x^2$. (12/9/2005)

4.3.23 Sia

$$f(x) = \sin\frac{\pi\, x}{2}, \quad \text{per} \quad x \in [0, 2].$$

a) Si scriva il polinomio $p(x)$ di interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_i = i$, per $i = 0, 1, 2$.

b) Si scriva il polinomio $q(x)$ di terzo grado ottenuto troncando la serie di Taylor di $f(x)$ di centro lo 0.

c) Si maggiorino i moduli dei resti

$$r(x) = p(x) - f(x) \quad \text{e} \quad s(x) = q(x) - f(x)$$

nell'intervallo $[0, 1]$. Quale dei due polinomi è preferibile come approssimazione di $f(x)$ in questo intervallo? (20/12/2005)

4.3.24 Sia $f(x) = \dfrac{1}{x}$, e siano $x_0 = 1$, $x_1 = 3$.

a) Si determini il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei due nodi e si disegni il grafico del corrispondente resto $r(x) = f(x) - p(x)$.

b) Si determini il polinomio $q(x)$ tale che

$$q(x_0) = f(x_0), \quad q'(x_1) = f'(x_1).$$

e si disegni il grafico del corrispondente resto $s(x) = f(x) - q(x)$.

Quale dei due polinomi approssima meglio $f(x)$ per $1 \le x \le 3$? (24/7/2006)

4.3.25 Sono assegnati i tre punti $(0, k_1)$, $(1, k_2)$ e $(2, k_3)$.

a) Si scriva il polinomio di interpolazione $p(x)$.

b) Si calcoli $p'(x)$. Si determini una condizione affinchè $p'(x)$ risulti costante al variare di x (suggerimento: si tratta di un'equazione in k_1, k_2, k_3).

c) Cosa accade di notevole ai tre punti assegnati se vale la condizione trovata in b)?

d) Sia $k_1 = k_3 = 0$ e $k_2 = 1$ e sia $f(x) = \sin(\pi x/2)$. Posto $r(x) = f(x) - p(x)$, si usi il teorema del resto per ottenere una maggiorazione di $\max_{[0,2]} |r(x)|$. (15/1/2007)

4.3.26 Sono assegnati i tre punti $(0, 0)$, $(k, 1)$ e $(1, 0)$, con $0 < k < 1$.

a) Si calcoli il polinomio $p(x)$ di interpolazione.

b) Si calcolino le coordinate del massimo di $p(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$.

c) Cosa accade delle coordinate calcolate nel punto precedente se k tende a zero.

d) Sia $k = 10^{-2}$ e sia $f(x)$ una funzione tale che $f(0) = 0$, $f(10^{-2}) = 1$, $f(1) = 0$ e tale che $0 \le f(x) \le 1$ per $x \in [0, 1]$. Sfruttando la conoscenza delle coordinate del massimo di $p(x)$, si dimostri che $\max_{[0,1]} |f(x) - p(x)| > 24$.

e) Assumendo che $f(x)$ sia derivabile tre volte con continuità si usi il teorema del resto per dimostrare che

$$\max_{[0,1]} |f^{(3)}(x)| > 6 \cdot 24. \quad (5/2/2007)$$

4.3.27 Sono assegnati i punti $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

a) Si calcolino il polinomio $p(x)$ di interpolazione dei primi tre punti assegnati ed il polinomio $q(x)$ di interpolazione degli ultimi tre punti assegnati.

b) Posto $\alpha(x) = -x/3 + 2/3$, si dimostri che $t(x) = \alpha(x)p(x) + (1 - \alpha(x))q(x)$ è il polinomio di interpolazione dei quattro punti assegnati.

c) Posto $\alpha(x) = ax + b$ si determinino a e b nel caso in cui i punti siano (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, 3$ e si assumano noti $p(x)$ e $q(x)$. (28/6/2007)

4.3.28 Di una funzione $f(x)$ sono noti i valori nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e x_2.

a) Si scriva il corrispondente polinomio $p(x)$ di interpolazione, ricavandone i coefficienti tramite la risoluzione del sistema lineare $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$ in cui V è una matrice di Vandermonde.

b) Se per risolvere il sistema si volesse usare il metodo di Jacobi, come dovrebbe essere scelto il punto x_2 affinché il metodo fosse convergente? (7/2/2008)

4.3.29 Dati i punti $(-k, y_1)$, $(0, y_2)$, (k, y_3) con k numero reale positivo, si dimostri che la retta di migliore approssimazione dei tre punti nel senso dei minimi quadrati è parallela a quella passante per $(-k, y_1)$ e (k, y_3). (22/1/2002)

4.3.30 Sono assegnati n punti (x_i, y_i), con $i = 1, \ldots, n$.

a) Si determini la costante c (ossia la retta di equazione $y = c$) che meglio approssima tali punti nel senso dei minimi quadrati.

b) Si consideri il caso particolare $(x_i, y_i) = (i, 1)$ per $i = 1, \ldots, n-1$ e $(x_n, y_n) = (n, n)$. Si determini $\lim_{n\to\infty} c$. (16/7/2002)

4.3.31 Sono assegnati i tre punti $(-1, -0.5)$, $(0, 0)$, $(2, 0.1)$.

a) Si scriva la retta di approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

b) Più in generale, dati tre punti (x_1, y_1), $(0, 0)$ e (x_2, y_2) tali che $x_1 < 0 < x_2$ e $y_1 < 0 < y_2$, si dimostri che la retta di approssimazione nel senso dei minimi quadrati ha coefficiente angolare positivo. (18/9/2002)

4.3.32 Si consideri $I = \displaystyle\int_0^1 x^3\, dx$.

a) Si applichi la formula dei trapezi con $N = 3$ per calcolare l'approssimazione S di I.

b) Si calcoli $|S - I|$ e lo si confronti con una maggiorazione del resto. (18/6/2003)

4.3.33 Si approssima l'integrale

$$\int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx,$$

con la formula dei trapezi. Si dica in quanti punti va suddiviso l'intervallo di integrazione affinchè l'errore assoluto risulti minore di 10^{-6}. (15/9/2004)

4.3.34 Si approssima l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos x}\, dx$$

con la formula dei trapezi. Si dica in quanti punti va suddiviso l'intervallo di integrazione affinchè l'errore assoluto risulti minore di 10^{-2}. (25/5/2004)

4.3.35 Un metodo per approssimare π consiste nel calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx,$$

il cui valore è $\pi/4$. Si dica in quanti punti va suddiviso l'intervallo di integrazione per ottenere un errore assoluto minore di 10^{-4} con la formula dei trapezi. (7/2/2005)

4.3.36 Si vuole ottenere un'approssimazione di $1/\log 2$ utilizzando la formula

$$\frac{1}{\log 2} = \int_0^1 2^x\, dx,$$

e approssimando l'integrale con la formula dei trapezi.

a) Si dica quanti punti occorre scegliere affinché l'errore relativo sia minore di 10^{-6}.

b) Si calcoli l'approssimazione S_N ottenuta con la formula dei trapezi con $N = 100$.

c) Il valore S_N è maggiore o minore del valore esatto dell'integrale? (9/6/2005)

4.3.37 Si vuole ottenere un'approssimazione di $\arcsin 0.1$ utilizzando la formula

$$\arcsin 0.1 = \int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

e approssimando l'integrale con la formula dei trapezi. Si dica in quanti punti va suddiviso l'intervallo di integrazione affinchè l'errore relativo risulti minore di 10^{-6}. (3/7/2006)

4.3.38 Si approssima l'integrale

$$\int_{\mathrm{e}}^{2\,\mathrm{e}} \log^2 x \, dx$$

con la formula di Cavalieri-Simpson. Si dica in quanti punti va suddiviso l'intervallo di integrazione affinchè l'errore relativo risulti minore di 10^{-6}. (12/9/2006)

4.3.39 Si vuole ottenere un'approssimazione di π utilizzando la relazione

$$\frac{\pi}{8} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx,$$

e approssimando l'integrale con la formula dei trapezi.

a) Si dica come mai non è possibile sfruttare la formula del resto per trovare quanti punti occorre scegliere affinché l'errore relativo sia minore di 10^{-6}?

b) Si scriva l'approssimazione di π che si ottiene con la formula dei trapezi con $N = 10$ (non eseguire il calcolo). (8/2/2006)

4.3.40 Una formula per approssimare $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ è $I \approx f(1/2)$. Si scriva la corrispondente formula generalizzata per calcolare $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e la si applichi alla funzione $f(x) = x^2$ con $a = 5$ e $b = 6$, suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in N intervalli con $N = 10$ e $N = 100$. Si dica quale è l'errore nei due casi (si tenga conto della formula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$). (16/9/2003)