Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 7/9/2016

Esercizio 1

(a) Il condizionamento di $f(x)$ si può studiare analizzando il comportamento del coefficiente di amplificazione cioè

$$c_f = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x^3}{\log^2(1+x)} \left(2 \, \frac{\log(1+x)}{x} \, \frac{x/(1+x) - \log(1+x)}{x^2} \right)$$

svolgendo i calcoli otteniamo

$$c_f = \frac{2x}{(1+x)\log(1+x)} - 2.$$

Poichè

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{(1+x)\log(1+x)} = 2,$$

abbiamo che $\lim_{x\to 0} c_f = 0$ e quindi il problema risulta ben condizionato in zero. Non essendoci altri punti di indeterminazione di c_f possiamo concludere che il problema non è malcondizionato sul $[0, 1]$.

(b) Analizzando con il grafo otteniamo che

$$\epsilon_{\mathrm{a}lg} = \epsilon_4 + 2 \left(\epsilon_3 + \epsilon_2 + \frac{1}{\log(1+x)} \epsilon_1 \right)$$

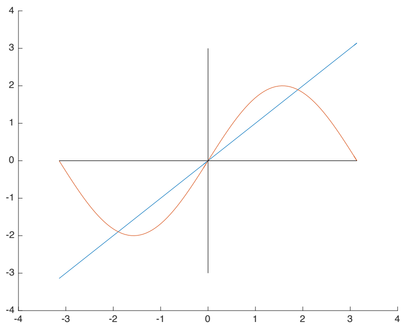
dove ϵ_1 è l'errore locale per il calcolo di $x+1$, ϵ_2 l'errore locale per il calcolo di $\log(1+x)$, ϵ_3 è l'errore introdotto dalla divisione e ϵ_4 dell'elevamento al quadrato. Dopo aver applicato la disuguaglianza triangolare dei moduli, ed aver maggiorato gli errori locali $|\epsilon_i|$ con la precisione di macchina otteniamo

$$|\epsilon_{\mathrm{a}lg}| \leq u(5 + \frac{1}{\log(1+x)}),$$

che non è limitabile in un intorno di zero, per cui l'algoritmo risulta instabile in un intorno di 0. Non ci sono altri punti di instabilità per $f(x)$.

Esercizio 2

(a) Con la separazione grafica si vede che l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali, $x = 0$, $x = \alpha$ e $x = -\alpha$, con $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Possiamo ulteriormente restringere l'intervallo trovando che $\alpha \in (\pi/2, 2/3\,\pi)$.



(b) Osservando il grafico in figura vediamo che se ci fosse convergenza ad α la convergenza sarebbe alternata perché la derivata di $g(x)$ è negativa. Osserviamo che

$$g'(x) = 2\,\cos(x),$$

quindi poiché $g(0) = 2$ non possiamo avere convergenza a 0. Si nota invece che $-1 < g'(x) < 0$ per $x \in (\pi/2, 2/3\,\pi)$, quindi $|g'(\alpha)| < 1$ quindi abbiamo convergenza locale. Si nota che $g(pi/2) = 2 < 2\pi/3$ e anche $g(2\pi/3) = \sqrt(3)\pi/2$ quindi abbiamo convergenza a partire da entrambi gli estremi. La convergenza è lineare. Dal grafico si osserva che abbiamo nconvergenza locale partendo da qualsiasi $x_0 > 0$. Non abbiamo mai convergenza alla soluzione $x = 0$, e per la soluzione $-\alpha$ vale lo stesso ragionamento che abbiamo fatto per la convergenza ad α poiché $f(x) = -f(-x)$.

(c) Il metodo in esame è il metodo delle corde con parametro $m = 3$. Poichè questo valore soddisfa le condizioni di convergenza cioè, dato $S = (\pi/2, 2\pi/3)$, vale $f'(x) \neq 0$, $m\,f'(x) = 3\,(1 - 2\cos(x)) > 0$ per $x \in S$ poichè $\cos(x) < 0$ per $x \in S$. Inoltre $\max_{x\in S} |f'(x)| = 2$ e $m = 3 > 2$. Quindi abbiamo convergenza a partire da un punto $x_0 \in [\pi/2, 2/3\,\pi]$. La convergenza è lineare perché $3 \neq f'(\alpha)$.

Esercizio 3

(a) Poiché fuori dalla diagonale gli elementi di A sono tutti uguali a $-\alpha$, è facile vedere che $\mathbf{u}$ è il vettore tutto 1.

(b) Gli autovalori di A sono della forma $\lambda_i = 1 - \alpha\mu_i$ dove μ_i sono gli autovalori della matrice di rango uno $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, infatti A è un polinomio di grado 1 della matrice $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Gli autovalori della matrice di rango 1 $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ sono $\mu_i = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e un autovalore $\mu_n = \mathbf{u}^T\mathbf{u} = n$. Quindi $\lambda_i = 1$, per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e $\lambda_n = 1 - \alpha n$. La condizione affinché A risulti invertibile, cioè $\lambda_i \neq 0$ è che $\alpha \neq 1/n$.

(c) La matrice di iterazione è $P = M^{-1}N = \alpha \mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Il metodo è convergente se e solo se $\rho(P) < 1$. Poiché gli autovalori di P sono 0 di molteplicità $n-1$ e $\alpha\, n$ con molteplicità 1 abbiamo convergenza se e solo se $\alpha < 1/n$.

Esercizio 4

(a) Il valore di $f(x)$ nei nodi risulta $f(0) = 1, f(1) = 0, f(3) = 2$. Il polinomio di interpolazione risulta quindi $p(x) = 2/3x^2 - 5/3x + 1$.

(b) Per dare una maggiorazione del resto possiamo utilizzare il teorema del resto dal quale abbiamo che

$$r(x) = x(x-1)(x-3)\frac{f'''(\xi)}{6}.$$

Passando ai moduli, e maggiorando la derivata terza di $f(x)$ con $\pi^3/8$, abbiamo

$$|r(x)| \leq |x(x-1)(x-3)|\frac{\pi^3}{48}.$$

Studiando analiticamente la funzione $|x(x_1)(x-3)|$, abbiamo due massimi relativi in $(4+\sqrt{7})/3$ e $(4-\sqrt{7})/3$, valutando la funzione su questi punti otteniamo i due valori $(20+14\sqrt{7})/27$ e $(-20+14\sqrt{7})/27$, da cui

$$\max_{x\in[0,3]} |r(x)| \leq \frac{20+14\sqrt{7}}{27}\frac{\pi^3}{48} \approx 1.3647$$