

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2010/2011 - Appello del 12 gennaio 2012

NOME

COGNOME

Esercizio 1 Sia V il sottospazio di \mathbf{R}^4 generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini una base di V .
- (b) Si individui una base ortonormale di V^\perp .

Esercizio 2 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

con k numero reale.

- (a) Si applichi il metodo di Gauss al sistema, si calcoli il valore di k per cui ammette infinite soluzioni, e si determini l'insieme di tali soluzioni.
- (b) Qual è la soluzione di lunghezza minima?

Esercizio 3 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Si applichi ad A il teorema di Gerschgorin, per righe e per colonne.

- (a) Gli autovalori λ_i di A sono reali? Sono distinti? Quelli reali sono positivi?
- (b) A è diagonalizzabile?
- (c) Si può limitare superiormente e inferiormente $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$?

Esercizio 4 Si consideri, per x intero, la funzione $f(x) = \sum_{k=1}^x (2k-1)$, cioè la somma dei primi x interi dispari.

- (a) Si faccia l'ipotesi che $f(x)$ sia un polinomio secondo grado, e lo si calcoli come polinomio di interpolazione nei nodi $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$.
- (b) (*facoltativo*) Si dimostri la formula trovata al punto precedente per induzione sull'intero x .