CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
Prima prova intermedia - A.A. 2011/2012 - 21/3/2012

NOME **COGNOME**

Esercizio 1 Si consideri il sottospazio V_k di $\mathbf{R}^4$, generato dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2k+3 \\ 4 \\ k^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -8 \\ k^3 \end{bmatrix},$$

dove k è un numero reale.

a) Si determinino i valori di k per cui $\dim V_k < 4$.

b) Si verifichi che esiste un valore $\bar{k}$ di k per cui $\dim V_{\bar{k}} = 2$. Si trovi una base $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$ formata da due dei vettori che generano $V_{\bar{k}}$, e da questa si ottenga un'altra base $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ ortonormale.

c) Dette S la matrice $[\,\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\,]$ e Y la matrice $[\,\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\,]$, si calcoli la matrice R tale che $S = YR$.

Esercizio 2 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi che vale la relazione $A^2 = -3A + 4I$, e da tale relazione si deduca che A non può essere singolare.

b) Si calcoli l'inversa di A direttamente dalla relazione al punto (a).

c) Si calcoli l'inversa di A con il metodo di Gauss, oppure tramite l'aggiunta.

d) (*facoltativo*) Si verifichi che $\mathrm{rk}(A - I) = 1$, e si trovino due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^3$, tali che sia $A = I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Da quest'ultima relazione si ricavi la relazione proposta al punto (a).

Esercizio 3 Si consideri la matrice $n \times n$ A i cui elementi a_{ij} sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } j = i+1 \text{ oppure } i = n \text{ e } j = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Per quali interi n A è invertibile?

b) Che forma hanno i vettori di $N(A)$ se A non è invertibile?

B