# Storia della matematica:

# la rappresentazione dei numeri e le operazioni

**O. Menchi**

# Introduzione

Quando ci confrontiamo con il passato siamo portati a pensare che ogni evoluzione nel tempo sia anche un'evoluzione di funzionalità. In questo giocano un ruolo non trascurabile
1. la teoria dell'evoluzione, che colloca l'uomo in una posizione preminente rispetto alle forme di vita che si sono via via evolute,
2. la storia che si studia a scuola, che ci insegna che a parte qualche deplorevole evento vi è stato un graduale miglioramento nelle condizioni di vita dell'uomo,
3. il confronto di oggi con il tempo dei nostri nonni, che mostra come la tecnologia ci semplifichi la vita.

Ciononostante vi è la sensazione che non sempre, o per lo meno non in tutti i campi, si possa trarre la conclusione che quanto viene dopo sia un miglioramento rispetto a quanto c'era prima. Consideriamo come esempio, i grandi scrittori del passato. Siamo tutti d'accordo che la scrittura si è molto semplificata dall'antichità ad oggi, anche grazie alla maggiore faciltà di riproduzione del testo scritto grazie all'invenzione della stampa. Eppure Omero, Dante, Shakespeare hanno scritto capolavori insuperabili.

Per quanto riguarda un settore abbastanza ristretto come la matematica vi è l'idea che tutta la costruzione teorica che si è venuta a formare nei secoli ne abbia migliorato progressivamente la funzionalità, nel senso che oggi siamo in grado di risolvere molti più problemi di quelli che venivano risolti un tempo. Ma, se non se ne considera la loro rilevanza scientifica, questi problemi che oggi possono essere risolti e prima non lo erano, sono veramente essenziali? Mi sembra che problemi come mandare un razzo su Marte o fare una previsione metereologica, che richiedono di risolvere complicati sistemi di equazioni differenziali, siano molto meno pressanti che risolvere il problema di costruire case e strade, che i romani facevano con molto acume e solo un po' di aritmetica.

Mi ricordo di un problema che veniva dato all'ultimo anno di una scuola elementare (almeno ai miei tempi) in cui si chiedeva quante mattonelle di forma rettangolare di lati 123 mm. per 245 mm. il signor Rossi dovesse comprare per pavimentare una stanza di forma pentagonale con lati lunghi 2,31 m. Ma chi le ha mai viste le stanze pentagonali o le mattonelle di lati così cervellotici?

In realtà, quello dello sviluppo della matematica può essere visto come un meccanismo che si autogenera: ogni nuova idea matematica genera nuove teorie e quindi nuovi problemi, per risolvere i quali si devono sviluppare nuove idee matematiche, e così via. Ma i matematici sono sempre stati molto abili nel convincere tutto il mondo scientifico (e non) che l'evoluzione della matematica era un fatto positivo e che la conoscenza della matematica era necessaria per far progredire tutte le scienze, con un'evidente ricaduta positiva anche dal punto di vista pratico.

In questa nota mi limiterò a quella parte della matematica che riguarda la scrittura dei numeri e le operazioni su di essi, cioè la parte che costituisce il nucleo essenziale dell'aritmetica. L'evoluzione di questa parte si può considerare conclusa con la pubblicazione della *Summa de arithmetica, geometria,...* di Luca Pacioli nel

1494 (l'unica aggiunta veramente importante dopo tale data è stata l'introduzione della notazione decimale per i numerici frazionari). Si trova scritto sui libri che la notazione posizionale dei numeri e la conseguente strutturazione delle operazioni ha fornito alla matematica quel salto di qualità che le ha consentito di progredire fino ad oggi. Ma la domanda che mi pongo è: davvero la notazione posizionale è così superiore, ad esempio, a quella additiva usata dai romani? Se noi dovessimo fare ancora le operazioni a mano una notazione additiva sarebbe un ostacolo insormontabile?

E per favore, non tiriamo in ballo i calcolatori, che oggi giorno governano la nostra vita e che usano la rappresentazione posizionale. A questo proposito, c'è un bellissimo racconto di Asimov, che accludo in appendice, e che dovrebbe farci riflettere.

La bibliografia sulla storia della matematica è vastissima. A partire dalla prima Encyklöpodie der Elementar-Mathematik di H.M. Weber e J. Wellstein, tre volumi pubblicati in Germania nel 1903-1907, sono state compilate molte enciclopedie di matematica in tutto il mondo. In Italia la più estesa è stata l'Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, sette volumi a cura di Luigi Berzolari, Editore Hoepli, uscita a partire dal 1930. Particolarmente esteso il capitolo sulla storia della matematica, a cura di Ettore Bortolotti.

Oggi vi sono una quantità di siti Internet di ottimo livello dedicati alla storia della matematica, a cui ci si può riferire per quel lavoro di documentazione storica che una volta veniva svolto sui manuali e sulle enciclopedie. Si suggeriscono

- History of mathematics
  http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_mathematics

che contiene, oltre ad una concisa storia della matematica, un prezioso elenco di titoli e di link,

- MacTutor History of Mathematics archive
  http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

creato da J.J. O'Connor e E.F. Robertson presso l'Università di St Andrews (Scotland), che contiene le biografie dettagliate di più di 1300 matematici,

- British Society for the History of Mathematics
  http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/resources.html

che contiene una lista annotata di link a siti e riviste di varie organizzazioni,

- Earliest Uses of Various Mathematical Symbols
  http://jeff560.tripod.com/mathsym.html

Una bibliografia dettagliata delle fonti consultate sarà poi riportata alla fine.

# 1. La notazione

Nel complicato processo di astrazione che ha portato alla nascita della matematica una fase importante è stata quella di associare ad ogni numero (derivato da un processo di conteggio) una rappresentazione simbolica. Nelle diverse culture i simboli usati per rappresentare i numeri sono in stretta relazione con i materiali usati come intermediari nel conteggio (sassolini, conchiglie, bastoncelli, intagli su osso o legno, nodi su cordicelle) e con le limitazioni e le possibilità dei materiali usati per la scrittura (tavolette di argilla e stili, fogli di papiro e pennelli con inchiostro, pergamena e penne di volatile, lapidi e scalpelli).

La rappresentazione di un numero richiede di combinare più simboli diversi. Si potrebbe adottare un simbolo per rappresentare l'unità, ripetendolo poi tante volte quante sono le unità contenute nel numero che si vuole rappresentare, ma questo schema non consentirebbe una rappresentazione accettabile di numeri grossi. Viene quindi adottato uno schema in cui i numeri sono rappresentati con combinazioni di simboli diversi, detti *cifre*. Il numero delle cifre è in relazione con la base usata per la rappresentazione.

Oltre alla base decimale usata da molte culture antiche (ad esempio egizia, romana, indiana, cinese) e conservatasi fino a oggi, altre basi sono state usate nelle diverse culture: i celti, i baschi, e, in tutt'altre parti della terra, gli khmer, gli atzechi e i maya usarono rappresentazioni su base 20 (si pensi alla forma 80 = quatre-vingts nel francese odierno e al termine score per indicare il venti, usato da Shakespeare). Sono state trovate tracce di uso della base cinque in alcune zone dell'India. La base 60 era usata dai sumeri e dai babilonesi ed è stata acquisita nella nostra rappresentazione delle misure del tempo e degli angoli.

Il motivo per cui la base 10 ha avuto alla fine il sopravvento sulle altre risiede probabilmente nel fatto che era quella usata dai romani, che per alcuni secoli dominarono militarmente ed economicamente il mondo occidentale. Inoltre era un sistema facile da comprendere, semplice in quanto faceva uso di pochissimi simboli e per il quale erano stati inventati algoritmi di calcolo su abaco molto sofisticati. Aveva un unico svantaggio: era poco adatto per le divisioni e quindi per il calcolo tecnico e scientifico. Ma a questo gli scienziati (ad esempio Tolomeo) rimediarono utilizzando la rappresentazione in base 60, più complessa ma più efficace.

Oltre alla base, l'elemento caratterizzante della rappresentazione è la *regola della giustapposizione* delle cifre, che indica come le diverse cifre concorrono alla formazione del numero. Due sono le regole che si sono affermate:

– l'*additività*, in cui il valore del numero è dato dalla somma dei valori di tutte le cifre che lo compongono. Ad esempio, nella rappresentazione romana CLVIII = 100+50+5+1+1+1 = 158. Esiste anche una variante di questa notazione che fa uso della sottrazione, ad esempio IV = 4 o XC = 90, che però è presente come scorciatoia solo in documenti piuttosto tardi e di carattere ufficiale.

– La notazione *posizionale*, in cui la giustapposizione di due cifre corrisponde a una moltiplicazione della prima cifra per la base e all'addizione della seconda cifra, ad esempio in base 10 è $23 = 2 \cdot 10 + 3$.

La notazione posizionale richiede la nozione dello zero. I primi ad usarla, i babilonesi, non avevano una rappresentazione esplicita dello zero, ma riuscivano ad individuare la giusta collocazione delle cifre riferendosi al contesto. La rappresentazione esplicita dello zero compare nella numerazione indiana alla fine del 6° secolo, nella numerazione cinese a partire dall'8° secolo, e in quella maya fra il 3° e il 9° secolo. In ogni caso, si trattò di una notazione dotta. Solo il passaggio delle conoscenze matematiche indiane agli arabi consentì l'adozione del sistema posizionale a scopi commerciali, e rese possibile il successivo passaggio in Europa nel 1200 per opera di Fibonacci.

Per seguire quella che è stata l'evoluzione delle cifre, bisogna innanzi tutto considerare i contesti culturali che hanno richiesto la rappresentazione dei numeri. Si tratta fondamentalmente di due contesti: uno civile e uno burocratico. Il contesto civile comprende l'organizzazione familiare, economica e sociale all'interno di piccole comunità e le transazioni commerciali che non coinvolgono l'amministrazione centrale dello stato. In questo contesto il numero è puramente funzionale, il suo uso ha connotazioni pratiche, e l'aritmetica è ridotta a poche regole (in genere solo l'addizione e la sottrazione).

Il contesto burocratico si è sviluppato in un secondo tempo quando l'evoluzione delle tecniche produttive ha consentito l'instaurarsi di stati accentratori. Nell'ottica moderna saremmo portati a pensare che l'apparato burocratico statale usasse la matematica solo per scopi amministrativi e fiscali, ma in realtà non era così nel 4° millennio avanti Cristo: il carattere sacro del sovrano permeava di sacralità anche le attività burocratiche, in qualche caso assimilando scribi e scienziati al rango di sacerdoti. Una simile burocrazia non si sarebbe potuta sviluppare senza un sistema matematico sofisticato, che rispondesse sia alle esigenze contabili di una tassazione delle transazioni commerciali e delle attività agricole e produttive (confini delle proprietà e stime della produzione), che alle esigenze religiose (amministrazione dei templi e calendari liturgici). Senza trascurare le richieste degli scienziati, come gli astronomi che dovevano studiare il moto degli astri, compilare i calendari e predire le eclissi, o gli architetti che presiedevano alla costruzione dei canali e degli edifici pubblici.

Nel prossimo capitolo si descrivono i sistemi di numerazione adottati da alcune grandi civiltà del passato, se ne analizzano l'evoluzione nel tempo e le loro interazioni. I sistemi che si prendono in considerazione sono il mesopotamico, l'egizio, il greco, il romano e l'indo-arabo, che hanno avuto una più diretta influenza sulla nostra rappresentazione attuale, tralasciandone altri, come il cinese e il maya, pur importanti in un'ottica mondiale.

Occorre però precisare che in epoca antica non era disponibile il simbolismo dell'algebra, per cui i problemi che venivano proposti facevano riferimento a situazioni concrete, da considerarsi comunque come tipiche, e ad algoritmi di risoluzione espressi in stile discorsivo direttamente sui dati numerici, che però illustravano come procedere con il calcolo in problemi analoghi. Oggi siamo talmente condizionati dalla pratica di esprimere i problemi e gli algoritmi in forma simbolica, che non riusciremmo a seguire le argomentazioni proposte nella forma originale. Per questo motivo quando si parla in modo divulgativo di storia della matematica è pratica corrente trascrivere i documenti nella notazione simbolica moderna. Questo fa sì che se ne possa seguire più agevolmente lo sviluppo storico, ma nello stesso tempo si appiattiscono e si nascondono le difficoltà affrontate dai nostri antenati.

Un ruolo importante in questa storia è giocato dallo zero. Lo zero, come ogni altra cifra, ha due funzioni: è sia una cifra della rappresentazione, al pari delle altre nove, sia un numero a sé stante, anche più importante degli altri numeri in quanto separatore fra gli interi negativi e gli interi positivi, con sue regole specifiche di elemento neutro dell'addizione e elemento nullo della moltiplicazione. Come cifra della rappresentazione, la sua storia inizia con la prima notazione posizionale dei babilonesi e termina con l'acquisizione completa della notazione posizionale da parte del mondo occidentale nel 13° secolo, ed è caratterizzata da un alternarsi di alti e bassi, di periodi di uso e di oblio.

Solo una rappresentazione posizionale dei numeri richiede l'uso di un carattere speciale per lo zero, la rappresentazione additiva ne esclude la necessità. Ma anche la rappresentazione posizionale può con qualche difficoltà fare a meno di un carattere specifico per l'indicazione dello spazio vuoto fra cifre, come dimostra il fatto che i babilonesi usarono una rappresentazione posizionale senza lo zero per centinaia di anni e solo nel 400 a.C. introdussero un simbolo speciale per lo spazio vuoto fra cifre (ma mai in posizione estrema). Come è possibile che non facessero confusione nell'assegnare il valore corretto alle diverse cifre? Dobbiamo però ricordare che i documenti pervenutici riguardano tutti problemi specifici, come transazioni commerciali, o anche problemi simulati ma comunque riferiti a possibili casi reali, dai quali è possibile dedurre le grandezze che entrano in gioco dalle situazioni concrete descritte.

In effetti, la necessità di stimare il valore di una grandezza matematica senza fare riferimento al contesto in cui appare, non viene sentita fino a quando la matematica non acquisisce una connotazione più astratta con l'uso di una notazione simbolica. Questo passaggio è avvenuto più volte nella storia della matematica, sempre in ambienti culturalmente avanzati. Gli studiosi greci, che pure avevano grandi capacità di elaborazione astratta, non svilupparono un sofisticato sistema numerico semplicemente perché rivolsero la loro attenzione alla geometria e non all'aritmetica. Quando però si rese necessario utilizzare l'aritmetica per calcoli avanzati come quelli di carattere astronomico, non esitarono a servirsi della notazione babilonese a base sessagesimale con l'introduzione completa dello zero (cioè in posizione intermedia e terminale), come documentato nell'Almagesto di Tolomeo.

L'invenzione dello zero come cifra viene fatta risalire a circa il 650 a.C. ad opera degli indiani, ma non vi è accordo fra gli storici. È stata anche avanzata l'ipotesi che in realtà i primi documenti credibili siano posteriori al periodo in cui gli astronomi greci usavano lo zero, e che si debba dare credito a loro per questa invenzione.

Il grande matematico arabo al-Khwarizmi, vissuto fra il 780 e l'850 è l'autore di un libro dal titolo Al-jabr (da cui l'italiano Algebra), in cui descrive la numerazione con le nove cifre più lo zero, indicandola come numerazione indiana. Seguendo le conquiste arabe la notazione si espanse nei paesi lungo il Mediterraneo meridionale e risalì in Spagna. È in Algeria che Leonardo dei Bonacci, detto Fibonacci, venne a contatto sul finire del 12° secolo con la notazione delle nove cifre più lo zero. Quando rientrò in Italia scrisse un libro, il *Liber Abaci*, in cui illustrò l'uso della nuova notazione, che definì indiana. Lentamente la notazione conquistò l'Europa.

L'introduzione nella matematica occidentale dello zero come numero a sé stante richiese parecchi secoli. Se vogliamo seguirne la storia, bisogna comunque risalire al 7° secolo in India, quando Brahmagupta nel descrivere le proprietà delle operazioni aritmetiche notò che sottraendo un numero positivo da se stesso si ottiene un numero che viene identificato con lo zero. A questo punto era abbastanza naturale ampliare l'insieme dei numeri naturali con lo zero e i numeri negativi e definire le operazioni aritmetiche su di esso. Anche la moltiplicazione per zero venne definita correttamente, mentre la divisione per zero presentò difficoltà insormontabili. Duecento anni più tardi la questione non era ancora risolta: Mahavira nel suo libro *Ganita Sara Samgraha* affermò che un numero diviso per zero resta inalterato. Dopo altri trecento anni Bhaskara scriveva che una frazione con denominatore zero deve essere chiamata infinita. Sembrerebbe una posizione di compromesso accettabile, ma lo diventa molto meno se si considera che ammettendo la possibilità di scrivere frazioni della forma $n/0$ si otterrebbe il valore $\infty$ indipendentemente da $n$ e quindi rimoltiplicando per 0 risulterebbe che ogni intero sarebbe uguale a ogni altro. Per il superamento definitivo di questo paradosso si dovette attendere l'introduzione dell'analisi.

# 2. I sistemi di numerazione

## 2.1 Il sistema mesopotamico

Sembra che le più antiche rappresentazioni grafiche di cifre siano apparse a partire dal 4° millennio avanti Cristo ad opera dei sumeri e che anzi rappresentino le più antiche forme di scrittura. Questo vorrebbe dire che la scrittura è stata in realtà un'invenzione di contabili per registrare operazioni economiche troppo numerose per essere affidate alla sola memoria degli individui. Ne sono esempio le centinaia di tavolette di argilla cotte al sole rinvenute durante gli scavi archeologici in Mesopotamia (a Uruk) risalenti a circa 5000 anni fa, che testimoniano che a tale data la scrittura ideografica aveva raggiunto lo stadio di forme stilizzate convenzionali. Queste registrazioni riportano due diverse rappresentazioni numeriche: una arcaica a base 10, usata per le transazioni commerciali più antiche, e una più moderna per la burocrazia, a base 60, che usava i caratteri cuneiformi.

La civiltà sumerica fu sostituita da quella accadica e successivamente da quella assiro-babilonese, che ne conservò l'organizzazione e i principi grafici. Le tavolette risalenti al periodo della dinastia degli Hammurabi (1800-1600 a.C. circa) mostrano che il sistema di numerazione a base 60 era ormai consolidato. In un primo tempo si usò uno stilo a forma di prisma triangolare, che più tardi venne sostituito da un altro costituito da due cilindri di diverso raggio. Con l'estremo dello stilo più piccolo si tracciava un segno verticale per rappresentare 10 unità e un segno obliquo per indicare l'unità; analogamente, un segno obliquo fatto con lo stilo più grande rappresentava 60 unità e un segno verticale 3600 unità. Per rappresentare numeri intermedi si ricorreva alla combinazione di questi segni. In pratica il vecchio sistema a base 10 era sopravvissuto per indicare le cifre del sistema a base 60.

La notazione dei babilonesi era parzialmente posizionale. Le cifre, rappresentate con gruppi di cunei appropriatamente spaziati, venivano lette da destra a sinistra e corrispondevano a potenze crescenti della base. Ad esempio, la sequenza di cifre (per semplicità rappresentate nella nostra notazione e separate da virgole) 1, 57, 46, 40 rappresenta il numero

$$1 \cdot 60^3 + 57 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 40 = 424000$$

In un primo tempo non vi era un metodo standard per indicare la posizione vuota, cioè non esisteva un simbolo particolare per indicare lo zero. Ai tempi di Alessandro Magno era stato creato un segno speciale, consistente in due piccoli cunei disposti obliquamente, che però veniva usato solo per indicare posizioni vuote intermedie. Ciò vuol dire che i babilonesi non giunsero mai a un sistema le cui cifre avessero un valore posizionale assoluto.

I babilonesi estesero il principio posizionale anche alle frazioni (rappresentate nella nostra notazione separate da punti e virgole). Ad esempio, in una tavoletta è riportata un'approssimazione della radice di 2 costituita dai simboli 1, 24; 51; 10; che corrisponde a

$$1 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} = 1.414222\ldots$$

Figura 1: Le cifre babilonesi

In questo modo i babilonesi venivano a disporre di un sistema di notazione molto potente, paragonabile a quello della moderna notazione frazionaria decimale.

Molte tavolette di argilla rinvenute nei siti archeologici testimoniano dell'alto livello di conoscenze matematiche dei babilonesi. Al termine della civiltà babilonese il sistema a base 60 fu adottato da altre culture per i calcoli scientifici, e fu usato con questo scopo fino a quando fu sostituito dal sistema decimale. Sopravvive ancora oggi nelle misure del tempo e degli angoli.

### 2.2 Il sistema egizio

L'origine della scrittura egizia è di alcuni secoli posteriore a quella sumerica. Si può quindi pensare che gli egizi abbiano ripreso l'idea della scrittura dai sumeri, ma certamente non la tecnica, in quanto i supporti materiali associati ai due sistemi di scrittura erano completamente diversi.

Gli egizi svilupparono un solo sistema di numerazione a base 10, usato sia nel contesto civile che in quello burocratico. Le cifre delle unità sono rappresentate con tratti verticali: un tratto per l'uno, due tratti affiancati per il due, ..., nove tratti disposti in un quadrato di 3 per 3 per il nove. Le cifre delle decine seguono la stessa disposizione di quelle delle unità, ma sono rappresentate da delle U rovesciate. Lo stesso discorso vale per le centinaia (rappresentate da spirali), per le migliaia (rappresentate da fiori di loto), e così via fino al milione, rappresentato con una figura inginocchiata, forse il dio dell'infinito.

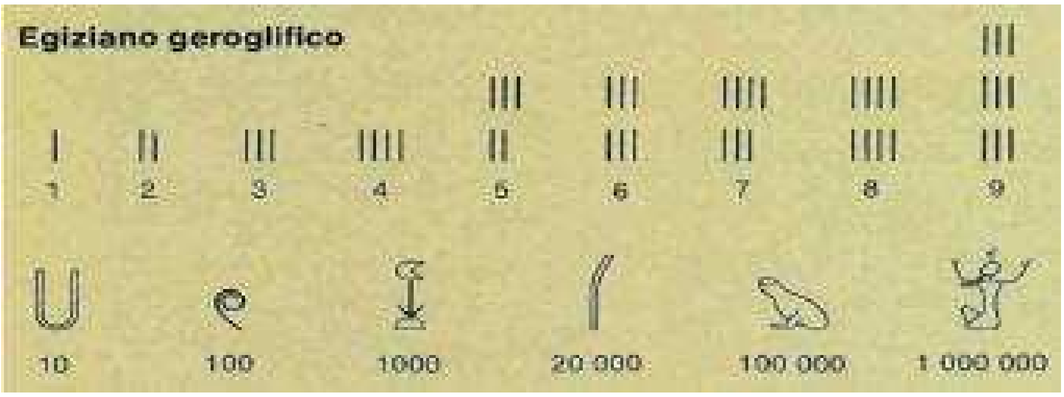



Figura 2: Numerazione egiziana

Le rappresentazioni di numeri sono molto frequenti nei documenti egizi: gli scribi avevano una vera passione nell'elencare, ad esempio, nelle molte iscrizioni che celebravano le spedizioni vittoriose dei sovrani, il numero dei prigionieri catturati e dei capi di bestiame razziati, accuratamente distinti per specie.

Fra i papiri pervenutici è estremamante importante il papiro di Rhind, dal nome dell'antiquario scozzese, Henry Rhind, che lo acquistò nel 1858. Questo papiro, compilato da uno scriba di nome Ahmes attorno al 1660 a.C., non è scritto in caratteri geroglifici, ma in una scrittura più agile, nota come scrittura ieratica. Si tratta di un documento di carattere didattico, orientato alle applicazioni pratiche, che contiene le soluzioni di 85 problemi matematici ricorrenti nella vita quotidiana degli uomini d'affari, degli agrimensori, dei costruttori. Le regole di calcolo che vi vengono illustrate provenivano dall'esperienza del lavoro e mancano le dimostrazioni generali, a dimostrazione del fatto che gli egizi non possedevano una struttura logica deduttiva basata su assiomi.

La numerazione rimane decimale, ma il principio ripetitivo della numerazione geroglifica viene sostituito con l'introduzione di simboli speciali che rappresentano i numeri da 1 a 9 e i multipli delle potenze di 10. Così, quattro non viene più rappresentato con quattro trattini verticali, ma da una lineetta orizzontale; e sette non viene scritto con sette trattini, ma come una unica cifra simile ad una falce.

Gli egizi usavano soprattutto l'addizione e la moltiplicazione per due, con cui eseguivano moltiplicazioni e le divisioni fra interi. Erano inoltre capaci di rappresentare particolari tipi di frazioni e di operare su di esse. Le frazioni utilizzate erano principalmente quelle unitarie, cioè aventi come numeratore l'unità. Erano anche usate la frazione 2/3 e alcune frazioni della forma $n/(n+1)$ in quanto complementari di quelle unitarie. Per tutte avevano delle notazioni speciali. Essi conoscevano e sfruttavano il fatto che due terzi della frazione $1/p$ è la somma delle due frazioni $1/(2p)$ e $1/(6p)$ e che il doppio della frazione $1/(2p)$ è la frazione $1/p$. Una frazione generale veniva così rappresentata come somma di frazioni con l'unità al numeratore. Per facilitare questa operazione di riduzione, il Papiro di Rhind riporta una tabella che, per tutti i valori dispari di $n$ da 5 a 101, esprime $2/n$ come somma di frazioni aventi per numeratore l'unità. Ad esempio

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}, \quad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

Le ragioni per cui una particolare forma di decomposizione venisse preferita a un'altra tra le tante possibili non sono chiare: forse la scelta, nella maggior parte dei casi, era dettata dalla preferenza degli egizi per frazioni derivate dalle frazioni 1/2, 1/3 e 2/3 mediante dimezzamenti successivi.

Per gli egizi i numeri, come ogni altro ideogramma, erano espressione della parola degli dei. Questo consentiva una duplice lettura, e quindi un'interpretazione parallela, terrena e sacra, di molti testi. Ad esempio, vi erano 6 diversi geroglifici per indicare le frazioni 1/2, 1/4, ..., 1/64. Accostando opportunamente questi geroglifici si otteneva la figura dell'occhio di Horus, il dio dalla testa di falcone. Narra la

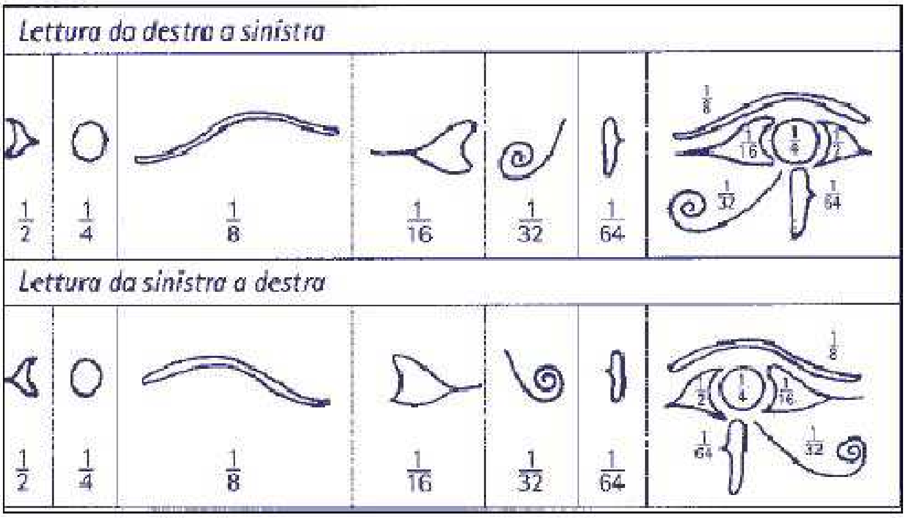



Figura 3: Il dio Horus

mitologia che l'occhio di Horus fu ferito e scomposto dal dio Seth, poi fu ricomposto, come spiegato nel Libro 17 dei Morti, dal dio con la testa di ibis Thot, originatore della matematica. L'occhio di Horus era dipinto sui sarcofagi e serviva al morto per vedere nell'aldilà. Purtroppo all'occhio ricostruito mancava un piccolo pezzetto (infatti se si sommano le 6 frazioni non si ottiene esattamente 1: manca ancora 1/64), che Thot poteva o meno concedere al morto. Alcune cerimonie funebri avevano proprio lo scopo di implorare la benevolenza di Thot, così da permettere al defunto un sereno transito nell'aldilà.

## 2.3 Il sistema greco

Circa 1000 anni prima di Cristo i fenici inventarono il primo sistema di scrittura alfabetica, adottato in seguito da tutte le popolazioni mediterranee. L'ordine dei segni alfabetici era rigidamente codificato. Ad esempio, la sequenza corretta delle lettere ebraiche è data nella Bibbia stessa. Questo artificio consentì di usare i segni alfabetici come cifre per la numerazione. Anche i greci, che adottarono l'alfabeto fenicio nel 9° secolo a.C. con poche varianti e adattamenti, usarono le lettere come cifre. Un precedente sistema grafico di origine autonoma, sviluppatosi a Creta prima del 12° secolo a.C., era stato spazzato via dall'invasione dorica.

Il sistema di numerazione ottenuto rappresentando le cifre con le lettere dell'alfabeto risulta abbastanza complicato per la presenza e l'uso contemporaneo di tanti simboli. La natura spiccatamente commerciale delle attività dei fenici portò comunque ad una aritmetica semplificata dall'uso degli abachi.

L'uso dei segni alfabetici come cifre permise in un secondo tempo di attribuire a ogni parola un valore numerico, deducendone una pratica mistico-religiosa battezzata isopsofia dai greci e dagli gnostici, e ghematria dai rabbini e dai cabalisti. Con tal mezzo, gli gnostici credettero di poter determinare la formula e il nome stesso di Dio per carpirne i segreti. Il processo condusse i cabalisti ebrei e successivamente gli esoterici cristiani e musulmani a ogni sorta di interpretazione simbolica.

Nel primo millennio a.C. la Grecia era politicamente divisa in diversi stati indipendenti, ciascuno con propria moneta, propria amministrazione e proprio sistema numerico. Si possono comunque individuare due sistemi numerici, che facevano entrambi uso di cifre rappresentate con lettere dell'alfabeto.

Nel primo sistema, più antico, noto come sistema attico, i numeri da uno a quattro erano rappresentati da trattini verticali ripetuti. Per gli altri numeri si usavano le lettere maiuscole iniziali del nome (a quel tempo non erano ancora state introdotte le lettere minuscole). Così la lettera $\Pi$ indicava il 5 (pente), la lettera $\Delta$ il 10 (deca), la lettera $H$ il 100 (hekaton), la lettera $X$ il 1000 (khilioi) e la lettera $M$ il 10000 (myrioi). Combinazione delle lettere indicavano i numeri secondo un sistema di notazione additivo a base primaria 10 e secondaria 5. Questo sistema di notazione, in uso nelle iscrizioni risalenti al periodo tra il 454 e il 95 a.C., dall'inizio dell'età alessandrina si trovò a coesistere con un successivo sistema, noto come sistema ionico, puramente alfabetico (in caratteri minuscoli) che alla fine lo sostituì.

La notazione comprendeva 27 lettere: 9 per i numeri inferiori a 10, 9 per i multipli di 10 inferiori a 100 e 9 per i multipli di 100 inferiori a 1000. Si ritiene che tale notazione fosse in uso già dal 5° secolo a.C. Una delle ragioni che inducono a ricercarne le origini in un'epoca così lontana è che l'alfabeto greco dell'età classica conteneva solo 24 lettere, per cui si era reso necessario mutuare le tre lettere stigma ($\varsigma$), qoppa (ϙ) e sampi (ϡ) da un alfabeto arcaico ormai obsoleto.

$1:\alpha\quad 2:\beta\quad 3:\gamma\quad 4:\delta\quad 5:\epsilon\quad 6:\varsigma\quad 7:\zeta\quad 8:\eta\quad 9:\vartheta$

$10:\iota\quad 20:\kappa\quad 30:\lambda\quad 40:\mu\quad 50:\nu\quad 60:\xi\quad 70:o\quad 80:\pi$ $\quad 90:$ ϙ

$100:\rho\quad 200:\sigma\quad 300:\tau\quad 400:\upsilon\quad 500:\varphi\quad 600:\chi\quad 700:\psi\quad 800:\omega$ $\quad 900:$ ϡ

Per gli altri numeri fino a 999 si usava la giustapposizione: ad esempio, il numero 123 si scriveva come $\rho\kappa\gamma$.

A partire da 10000, la notazione alfabetica seguiva un principio moltiplicativo: il simbolo di un numero intero qualsiasi da 1 a 9999, se collocato al di sopra della lettera $M$, o dopo di essa, separato dal resto del numero mediante un puntino, indicava il prodotto dell'intero per il numero 10000. Per rappresentare numeri ancora più grandi si poteva applicare lo stesso principio alla miriade doppia. In questo modo la notazione greca per i numeri interi era efficace e non eccessivamente ingombrante anche con i numeri grossi. Per i numeri frazionari, i greci, come gli egizi, tendevano a usare frazioni con numeratore unitario, di cui scrivevano il denominatore seguito da un accento per distinguerlo dall'intero corrispondente.

Nella storia della civiltà i greci occupano un posto preminente. Sebbene abbiano subito l'influenza delle civiltà che li circondavano, i greci costruirono una civiltà e una cultura che sono le più influenti sullo sviluppo della cultura occidentale moderna. La matematica greca classica si sviluppò in numerosi centri, in ognuno dei quali un gruppo di allievi portava avanti gli studi sotto la guida di un maestro. La prima di queste scuole, quella ionica, fu fondata nel 6° secolo da Talete a Mileto ed ebbe tra i suoi allievi Anassimandro, Anassimene ed Anassagora. Talete è considerato il padre della teoria delle proporzioni, che gli avrebbe consentito di risolvere il problema, propostogli dal faraone Amasis, riguardante l'altezza della piramide di Cheope senza l'uso di strumenti. Piantata un'asta al limite dell'ombra proiettata dalla piramide, poiché i raggi del sole, investendo l'asta e la piramide formavano due triangoli, aveva dimostrato che l'altezza dell'asta e quella della piramide stanno nella stessa proporzione in cui stanno le loro ombre.

Dalla teoria delle proporzioni nasce il concetto di commensurabilità, cioè di numero razionale, come rapporto di numeri interi. La concezione che l'essenza di tutte le cose, in geometria come in tutte le questioni teoriche e pratiche, potesse essere spiegata in termini di numeri razionali, costituiva un dogma basilare anche della scuola pitagorica, fondata a Crotone da Pitagora di Samo (580-500 a.C.). Ben presto però si scoprì che la commensurabilità non era in grado di spiegare neppure semplici proprietà fondamentali della geometria, come il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato. Infatti noi indichiamo tale rapporto con la $\sqrt{2}$, che non è un numero razionale.

Nel primo periodo classico è difficile distinguere fra scienza e filosofia: soltanto nel 4° secolo appare una netta differenziazione della matematica. Fra la morte di Socrate nel 399 a.C. e quella di Aristotele nel 322 a.C. emergono figure importanti di matematici che avevano rapporti più o meno stretti con l'Accademia di Platone ad Atene, centro mondiale della matematica dell'epoca.

La conquista macedone contribuì a fondere la civiltà greca con quella orientale. Alla morte di Alessandro il suo impero si disgregò a causa delle lotte fra i suoi generali. La provincia egiziana fu assegnata a Tolomeo I, che scelse come capitale Alessandria e vi creò un ambiente favorevole al fiorire delle arti e delle scienze. Ad Alessandria Euclide (325-265 a.C.), raccogliendo il patrimonio di sapere costruito dagli studiosi che lo avevano preceduto, compilò con i suoi *Elementi* il primo esempio di quello che oggi diremmo un trattato scientifico, per il metodo rigorosamente deduttivo che fa discendere ogni proposizione da proposizioni precedentemente stabilite, a partire da un nucleo iniziale di assiomi. Ad Alessandria operò anche Apollonio di Perga (262-190 a.C.), autore di molte opere matematiche, purtroppo andate quasi tutte perdute. Ci resta il suo capolavoro, *Le coniche* scritto nel 225 a.C.

Per tutta l'età ellenistica Alessandria rimase il centro degli studi matematici, ma quello che è universalmente riconosciuto come il più grande matematico di tutta l'antichità, Archimede (287-212 a.C.), non operò ad Alessandria ma assai lontano, a Siracusa.

Dopo la conquista romana, ad Alessandria la grande produzione matematica si diradò: troviamo Ipparco, indicato come il padre della trigonometria, Erone, autore di una *Metrica* in cui i problemi geometrici sono affrontati in modo pratico-numerico con procedimenti spesso approssimati, Tolomeo (100-175), autore dell'Almagesto, il più celebrato trattato di astronomia, Diofanto (200-284), indicato come il padre dell'algebra, che si occupò dei problemi connessi alla risoluzione esatta di equazioni che ammettono solo soluzioni razionali, e finalmente Pappo (290-350), autore di una *Collezione*, a coronamento della geometria greca.

## 2.4 Il sistema romano

Anche l'alfabeto dei romani ha origine da quello fenicio, ma a differenza di quelle greche le cifre romane malgrado la loro apparenza non hanno origine alfabetica. Tutti gli antropologi sono d'accordo sul fatto che si tratti di una stilizzazione delle tacche usate nella pratica dell'intaglio per contare. Alcune antiche epigrafi inducono a ritenere che i segni usati fossero di origine etrusca. Solo in seguito a successive trasformazioni, i simboli assunsero l'aspetto delle lettere dell'alfabeto. I simboli dell'unità, del 5, del 10 e del 50 divennero una I, una V, una X, una L. I simboli del 100 e del 1000 acquisirono la forma definitiva C ed M in base alla prima lettera del nome. Il simbolo del 500, che non è altro che la metà del segno del 1000 finì col modificarsi in una D.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| simboli arcaici | $\mid$ | $\vee$ | $\times$ | $\vdash$ | $\subset$ | $\mid\!\supset$ | $\subset\!\mid\!\supset$ |
| simboli classici | I | V | X | L | C | D | M |
| valore | 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

Sovrapponendo una linea sopra ad un simbolo, lo si moltiplicava per 1000. Così $\overline{\mathsf{V}}$ valeva 5000 e $\overline{\mathsf{C}}$ valeva 100000. Con due linee sovrapposte si moltiplicavano i simboli per un milione. Era quindi possibile rappresentare numeri comunque grandi.

La notazione romana è un esempio di sistema a legge additiva in cui si usano le cifre più grandi possibili, che vengono scritte da sinistra a destra in ordine decrescente. Così 15 si scrive XV e non VVV o XIIIII. Per evitare la scrittura di lunghe successioni di simboli, in certi casi viene utilizzata anche la notazione sottratti-

va: una cifra che stia immediatamente a sinistra di un'altra che indica un numero maggiore va intesa in senso sottrattivo. Vi sono alcune regole da rispettare:
(1) solo I, X e C possono essere usati in senso sottrattivo;
(2) un solo numero più piccolo può essere posto a sinistra, così 19 può essere scritto XIX, ma 18 non può essere scritto XIIX;
(3) il numero da sottrarre non deve essere meno di un decimo del valore del numero dal quale è sottratto, così, X può essere posizionato a sinistra di C o di L, ma non a sinistra di M o di D: quindi 49 si scrive XLIX e non IL.

Sembra però che nei documenti ufficiali la notazione sottrattiva sia apparsa piuttosto tardi e che sia diventata di routine solo nel medioevo.

Si usa dire che la numerazione romana non si prestava a rappresentare le frazioni. In effetti non si trovano rappresentazioni di frazioni, ma dai testi risulta che i romani avevano i nomi delle frazioni, espresse rispetto a denominatori in diverse basi. La base fondamentale era 12, detta *as*. La dodicesima parte di un as era detta *uncia*. Così 5/12 era *quinque unciae*, abbreviato in *quincunx* e 1/24 era *semeuncia*. Con opportune combinazioni delle frazioni si poteva esprimere praticamente qualsiasi quantità frazionaria. Anche se non scritte esplicitamente, le frazioni erano certamente usate nei conti.

Attualmante i numeri romani sono largamente impiegati per gestire la numerazione ordinale (primo, secondo, terzo etc.), ad esempio per numerare i capitoli di un libro o i paragrafi di una legge, per indicare l'anno di edizione di un libro o di un film, per individuare un secolo o un sovrano o un papa.

## 2.5 Il sistema indo-arabico

Lo sviluppo della notazione numerica sembra aver seguito in India lo stesso schema che si riscontra in Grecia. Le iscrizioni del periodo più antico mostrano dapprima semplici trattini verticali, disposti a gruppi; nel 3° secolo a.C., però, era già in uso un sistema simile a quello attico. Nel nuovo schema si continuava ad usare il principio ripetitivo, ma venivano adottati nuovi simboli di ordine superiore per indicare quattro, dieci, venti e cento. Questa scrittura, detta karosthi, venne gradatamente sostituita da un'altra notazione, nota come notazione in caratteri brahmi, che presentava un'analogia con la notazione alfabetica delle cifre del sistema ionico dei greci.

Per passare dalle cifre in caratteri brahmi all'attuale notazione per i numeri interi sono necessari due passi. Il primo è il riconoscimento che, attraverso l'uso del principio posizionale, le cifre indicanti le prime nove unità sono sufficienti per descrivere anche i corrispondenti multipli di dieci e ogni sua potenza. Non si sa quando sia avvenuta la riduzione a nove cifre; è probabile che tale transizione sia avvenuta in modo graduale. Va notato che il riferimento a nove cifre, anziché a dieci, implica che gli indiani non avevano ancora fatto il secondo passo verso il sistema moderno di numerazione, ossia l'introduzione di un simbolo per lo zero. Il primo libro in cui comparve la notazione posizionale con l'uso dello zero è il *Brahmasphuta Siddhanta*, scritto dal matematico indiano Brahmagupta, vissuto fra il 598 e il 668.

Vi si descrive un sistema che fa uso di nove cifre, da 1 fino a 9, e di un simbolo, lo 0, che indica la posizione vuota. Questa notazione indiana passa nel mondo islamico ed è documentata già nel 662 a Damasco.

È possibile che lo zero abbia avuto origine nel mondo greco (inventato nei circoli neopitagorici greci di Alessandria) e sia stato trasmesso all'India dopo che vi si era consolidato il sistema posizionale decimale. Con l'introduzione, nella notazione indiana, di un segno rotondo a forma di uovo per indicare lo zero, veniva completato il moderno sistema di numerazione per gli interi. Anche se l'aspetto delle dieci cifre era molto diverso da quello attuale, i principi di base (base decimale, notazione posizionale e simboli diversi per le dieci cifre) erano comunque acquisiti.

All'interno dei confini dell'impero arabo vivevano popoli di origini etniche molto diverse fra loro: siriani, greci, egiziani, persiani, turchi, e gli arabi assimilarono rapidamente le loro culture. Tali differenze culturali passarono anche nella matematica araba. In alcune opere veniva usata la notazione numerica indiana, in altre occasioni adottavano lo schema di numerazione alfabetico dei greci (dove le lettere erano sostituite con quelle arabe equivalenti). La notazione indiana finì per prevalere; tuttavia, anche tra coloro che usavano quest'ultima vi erano considerevoli differenze nelle forme delle cifre usate. Le varianti erano così evidenti che alcuni studiosi hanno avanzato l'ipotesi di origini completamente diverse per le forme usate nella parte orientale, forse provenienti direttamente dall'India, e in quella occidentale, forse provenienti da forme greche o romane. Più probabilmente le varianti erano il risultato di graduali mutamenti nello spazio e nel tempo: infatti le cifre arabe usate oggi sono molto diverse dalle moderne cifre devanagari ancora in uso in India. Le nostre cifre sono note come cifre arabe, nonostante il fatto che esse presentino scarsa somiglianza con quelle in uso oggi nei paesi del mondo islamico. Sarebbe meglio dare al nostro sistema di numerazione il nome di indo-arabico.

Due grandi matematici arabi la cui opere influenzarono la matematica occidentale furono Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi (780-850 circa), che operò a Bagdad, a cui si deve il termine *al-jabr* e Omar Khayyam (1048-1131), che nel 1070 pubblicò a Samarcanda un importante trattato sui problemi dell'algebra.

## 2.6 L'introduzione del sistema indo-arabico in Europa

La diffusione del sistema di numerazione indo-arabico in Europa è legata essenzialmente a due nomi: Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi (790-850), matematico e astronomo vissuto a Baghdad, e Leonardo Pisano (1170-1250), detto Fibonacci (abbreviazione di filius Bonacci), che per seguire il padre nei suoi impegni, aveva viaggiato in Egitto, Siria, Grecia e Algeria, dove era venuto a contatto con i metodi algebrici arabi.

L'opera più importante di al-Khuwarizmi, *al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, ha fornito alle lingue moderne un termine d'uso popolare: algebra. Oltre a questa, egli scrisse un'opera di aritmetica di cui ci è pervenuta soltanto la traduzione latina recante il titolo *De numero indorum*, che descrive in modo completo il sistema di numerazione indiano (da come cambia il valore del numero cambiando di posto, all'importanza dello zero, alle operazioni basate su questo sistema). L'algebra di al-Khuwarizmi ebbe una grossa influenza sui matematici europei del Medioevo, grazie alla sua traduzione in latino fatta da Roberto di Chester prima e da Gerardo da Cremona poi.

Il Fibonacci, rientrato a Pisa dopo i suoi viaggi e i suoi studi nel mondo arabo, publicò nel 1202 il *Liber abaci*, in cui vengono discussi in maniera esauriente metodi e problemi algebrici, difendendo decisamente l'uso delle cifre indo-arabiche. Nel libro (in latino) descrive *le nove figure indiane* insieme al segno 0 e le regole per operare su di esse. Purtroppo, il principale vantaggio della notazione posizionale, la sua applicabilità alle frazioni, è sfuggito a coloro che usarono le cifre indo-arabiche durante il primo millennio della loro esistenza. Anche Fibonacci, nella sua opera, usa le frazioni a numeratore unitario e presenta tavole di conversione per esprimere le frazioni comuni in termini di frazioni a numeratore unitario. Per esempio, la frazione $98/100$ viene trasformata in $1/100 + 1/50 + 1/5 + 1/4 + 1/2$ e la frazione $99/100$ viene trasformata in $1/25 + 1/5 + 1/4 + 1/2$.

Per quanto l'Europa occidentale si dimostrasse aperta verso la matematica araba, l'abbandono del vecchio sistema numerico romano, avvenne molto lentamente, forse perché era abbastanza diffuso il calcolo con l'abaco che era semplice con il vecchio sistema, ma non con il nuovo. Malgrado la popolarità del libro di Fibonacci tra gli studiosi, il primo manoscritto francese ad usare il nuovo sistema di numerazione fu scritto nel 1275 e solo nel 16° secolo esso fu definitivamente adottato.

Il concetto del numero come entità essenzialmente intera era centrale alla matematica pitagorica e su di essa si basava tutto il concetto di misura (geometrica) attraverso la commensurabilità. Ma questa elegante costruzione mostrò i suoi limiti nel momento in cui si dimostrò che il lato e la diagonale del quadrato non erano commensurabili. Occorsero secoli perché si accettasse che numeri razionali e non razionali potessero coesistere.

Il passo successivo sarebbe stato l'inclusione dei numeri negativi. A noi moderni sembra ovvio che se si toglie un numero più grosso da uno più piccolo il risultato sia un numero negativo, ma questo atteggiamento è accettabile solo se vi è una sufficiente formalizzazione delle notazioni e dei problemi matematici. Una cosa è dire: "Quanto fa $a - b$?" e una cosa è dire "Se tolgo 5 cose da un insieme di 3 cose, quante ne restano?" Ma non si possono togliere 5 cose se ne abbiamo meno. Conseguenza: i problemi che portavano a soluzioni non positive venivano semplicemente scartati in quanto non ritenuti di utilità pratica. Solo la rappresentazione dei numeri come punti di una retta ordinata giustifica l'esistenza dei numeri negativi, ma per questa interpretazione geometrica bisognava aspettare ancora molti secoli.

Una nuova fase della matematica inizia in Italia attorno al 1500. Infatti, nel 1494, appare la prima edizione della *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* di Luca Pacioli. La Summa è una grandiosa compilazione, scritta in volgare, di materiali appartenenti a quattro campi diversi della matematica: aritmetica, algebra, geometria euclidea molto elementare e registrazione a partita doppia.

# 3. Le operazioni

## 3.1 Strumenti di calcolo

Gli algoritmi che usiamo oggi per eseguire le quattro operazioni dell'aritmetica (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, si escludono qui operazioni più avanzate come l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice, i logaritmi) sono specifici per la notazione posizionale e costituiscono il punto di arrivo di centinaia di anni di sviluppo della matematica. Una delle loro caratteristiche principali è quella di fornire il risultato senza l'aiuto di strumenti, con procedimenti così semplici e veloci che possono essere insegnati ai bambini della scuola elementare per le operazioni con i numeri naturali e nella media inferiore per le operazioni con le frazioni.

L'addizione e la sottrazione venivano effettuate già in India in maniera molto simile a quella odierna; l'idea fondamentale è quella dell'incolonnamento e dell'esecuzione delle somme o delle differenze a partire dalla colonna delle unità con eventuali riporti o prestiti. La moltiplicazione è l'operazione per la quale troviamo la maggior varietà di algoritmi, che anche graficamente assumevano aspetti molto diversi tra loro e ai quali vennero assegnati i nomi più fantasiosi. Per quanto riguarda la divisione, il procedimento che noi utilizziamo ha raggiunto l'attuale forma nel 15° secolo. Si trovano, e tuttora si insegnano, una variante lunga e una variante corta a seconda che si scriva o no la sottrazione che porta di volta in volta al resto.

Prima dell'adozione della numerazione posizionale le operazioni venivano generalmente eseguite mediante l'uso delle dita o dell'abaco. Riferimenti all'uso di strumenti di calcolo si trovano più o meno in tutte culture, da quella sumerica a quella egizia, da quella greca a quella romana. Inizialmente si trattava di semplici tavolette che servivano a facilitare le addizioni e le sottrazioni. Successivamente furono arricchite di una serie di guide parallele, che convenzionalmente indicavano le unità, le decine, le centinaia, ecc., Lungo queste guide potevano essere spostati piccoli oggetti mobili, come pietruzze (in latino *calculi*). I materiali usati nella costruzione degli abachi sono variati assai a seconda del luogo e dell'epoca, dalla sabbia al legno, dalla pietra al metallo. Il loro funzionamento si basava sul principio fondamentale che il valore di una configurazione dipende dalla posizione occupata dai diversi calculi. Si trattava di un'applicazione pratica del principio di numerazione posizionale, che però non era utilizzata nella contemporanea scrittura dei numeri.

Nella sua forma più evoluta l'abaco consentiva di fare anche moltiplicazioni e divisioni mediante addizioni e sottrazioni ripetute. Un operatore allenato poteva raggiungere anche notevoli velocità di esecuzione.

In Europa l'uso dell'abaco durò anche dopo l'adozione della numerazione attuale e cessò solo con la rivoluzione francese. Fra i tanti modelli elaborati uno dei più famosi fu l'abaco a scacchiera utilizzato in Inghilterra, da cui deriva il titolo di *cancelliere dello scacchiere* attribuito al ministro delle finanze inglese. Invece in Asia l'uso dell'abaco si è protratto assai più a lungo, praticamente fino alla diffusione dei calcolatori elettronici. Gli abacisti giapponesi ad esempio rivaleggiavano per la loro velocità e accuratezza con gli strumenti meccanici di calcolo.

Con la notazione posizionale, introdotta da Fibonacci nel 13° secolo, l'abaco in quanto strumento di calcolo perse la sua posizione preminente perché le operazioni potevano essere fatte direttamente sulle cifre rappresentate. In realtà il termine "abaco" acquistò un significato più ampio che quello di semplice strumento di calcolo, come risulta dal titolo *Liber abaci* dato da Fibonacci al suo libro. È possibile che a Pisa, dove era attivo come esperto contabile del Comune, il Fibonacci si sia dedicato anche all'insegnamento, formando direttamente una prima generazione di esperti nell'uso della notazione posizionale che contribuirono alla diffusione del Liber abaci anche in altre regioni. Dal successivo 14° secolo è comunque ben documentata la presenza delle cosiddette "scuole d'abaco", in cui si insegnava la nuova aritmetica, frequentate da coloro che volevano dedicarsi alla mercatura o diventare architetti, pittori o scultori.

Il fatto di essere scritto in latino era di ostacolo all'utilizzazione diretta del Liber abaci nelle scuole di abaco che nel frattempo fiorivano. Per questo, vari trattati furono composti in volgare dai Maestri d'abaco sulla base del Liber abaci, limitatamente all'aritmetica pratica. I primi trattati di questo tipo comparvero già alla fine del 13° secolo e nei due secoli successivi si assistette a un vero fiorire: ci sono pervenuti circa 300 manoscritti. Il primo trattato a stampa venne pubblicato a Treviso nel 1478. Poco dopo, nel 1494, venne pubblicata a Venezia la Summa di Luca Pacioli che ebbe una notevole fortuna. La Summa costituisce una completa esposizione del sapere matematico evolutosi nel corso dei quasi tre secoli che lo separano dal Liber abaci.

Fin dai tempi del Fibonacci si verificò una contrapposizione fra i cosiddetti abachisti, legati alla notazione romana, e gli algoritmisti, che sostenevano la nuova notazione posizionale. A ben guardare, gli algoritmi usati dalla nuova aritmetica non erano poi tanto diversi da quelli usati dagli abachisti, perché anche l'abaco si basava su una rappresentazione implicita posizionale. La differenza fondamentale era che usando l'abaco i dati iniziali e intermedi venivano continuamente corretti, perdendo traccia dei diversi passi eseguiti e quindi perdendo la possibilità di un controllo di correttezza. Invece la nuova aritmetica presupponeva la scrittura di tutti i numeri coinvolti nel calcolo, di cui veniva tenuta traccia. Può sembrare strano, ma questo fu uno dei fattori che frenò la diffusione del nuovo metodo: la scrittura dei numeri richiedeva l'uso in grande quantità di materiale a basso costo, che non poteva essere che la carta.

Alla fine, dopo secoli di confronti, vinsero gli algoritmisti per vari motivi:

(a) l'apprendimento e la pratica dell'abaco richiedevano un allenamento prolungato rispetto a quello della nuova aritmetica, soprattutto per le operazioni più complicate, come la divisione e l'estrazione delle radici,

(b) l'estensione della notazione posizionale ai numeri non interi che eliminò la necessità dell'uso assai complicato delle frazioni,,

(c) la contemporanea invenzione della stampa, che contribuì ad una maggiore diffusione dei libri stampati, contribuì anche ad un incremento della produzione di carta,

(d) a livello teorico, il simbolismo che si stava affermando in matematica e che contribuì alla sua rapida evoluzione, era compatibile con una mentalità algoritmica ma molto meno con una mentalità abachistica.

Al giorno d'oggi non ci si pone più il problema se la notazione romana possa competere con quella posizionale, anche perché dipendiamo in modo quasi totale dai calcolatori, che devono operare con notazione binaria posizionale. Ma in fondo al nostro cervello resta pur sempre un piccolo tarlo: ma davvero la notazione attuale è superiore a quella romana? o è possibile che da certi punti di vista quella romana possa essere considerata competitiva? Nei prossimi paragrafi cercherò di dare una risposta a questa domanda limitatamente alle quattro operazioni aritmetiche sui numeri naturali.

## 3.2 Le quattro operazioni aritmetiche

Fin dalla scuola elementare abbiamo imparato a eseguire le quattro operazioni aritmetiche, prima con i numeri naturali, poi con quelli decimali. Non varrebbe quindi la pena di rispolverare qui i corrispondenti algoritmi, se non per metterne in evidenza la loro caratteristica fondamentale: quella di dipendere da tabelle di risultati parziali, le tavole dell'addizione e della moltiplicazione, che devono essere disponibili al momento in cui si esegue il calcolo. In pratica, questo si realizza facendo imparare le tavole a memoria ai bambini della scuola elementare. Molte persone, fra quelle che dicono di non essersi mai trovate a loro agio con lo studio della matematica, danno la colpa proprio al fatto di non essere riuscite a memorizzare la tavola pitagorica.

È possibile costruire algoritmi che eseguono la moltiplicazione e la divisione utilizzando tabelle diverse. Ad esempio i babilonesi, che non avevano difficoltà a sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere per 2, già dal 2000 a.C. possedevano le tabelle dei quadrati, dei cubi e dei reciproci degli interi. Potevano così moltiplicare due interi qualsiasi, usando una delle due relazioni

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4},$$

semplicemente come differenza di quadrati, e dividere due interi usando il reciproco

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Ad esempio, per calcolare $12 \times 3$ si cercano nella tabella dei quadrati $(12+3)^2 = 15^2 = 225$, che viene rappresentato con $3,45$ e $(12-3)^2 = 9^2 = 81$, che viene rappresentato con $1,21$. Sottrendo si ha $2,24$. La prima divisione per 2 dà $1,12$, la seconda divisione per 2 dà 36, correttamente. Per calcolare $4/27$, dalla tabella dei reciproci si ricava che nella base sessagesimale

$$1/27 = 0;2;13;20; \quad \text{per cui} \quad 4/27 = 0;8;53;20;$$

La base 60 consente la rappresentazione esatta di molte delle frazioni che compaiono nella pratica. Naturalmente nella tabella dei reciproci mancano i reciproci di numeri che non hanno rappresentazione finita nella base 60. Ad esempio, mancano 1/7, 1/11, 1/13, che sono periodici anche nella base 60. Ma questo non creava problemi, perché lo scriba poteva usare un'approssimazione, ad esempio $1/7 \sim 0; 8; 34; 17;$ con un errore di $1/7 \cdot 60^{-3} = 1/1512000$. Tramite le tabelle dei quadrati i babilonesi potevano calcolare con sufficiente approssimazione le radici quadrate.

Con la notazione posizionale ogni numero naturale $a$ può essere scritto nella forma

$$a = a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i\, 10^i,$$

dove $a_i$, $i = 0, \ldots, n$ sono le sue $n+1$ cifre in base 10 e $a_n \neq 0$, e viene normalmente rappresentato giustapponendo le cifre

$$a = a_n\, a_{n-1}\, \ldots a_1\, a_0.$$

Supponiamo di dover eseguire un'operazione su due dati $a$ e $b$, il primo con $n+1$ cifre, il secondo con $m+1$ cifre, e per semplicità supponiamo che $a \geq b$ (questa è l'ipotesi che si fa sempre con la sottrazione e la divisione).

Per eseguire l'addizione $a + b$, si deve dapprima incolonnare le cifre dei due numeri, cosa che in pratica comporta l'eventuale inserimento di $n - m$ zeri davanti a $b$, nel modo seguente

$$\begin{aligned} a + b = a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0 \quad + \\ b_n\, 10^n + b_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots + b_1\, 10 + b_0 \end{aligned}$$

Poiché la somma è

$$a + b = (a_n + b_n)\, 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, 10^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)\, 10 + (a_0 + b_0)$$

è necessario saper calcolare la somma delle cifre $a_i + b_i$ per ogni possibile combinazione degli addendi e tenere presente l'eventuale riporto. A parte la somma per zero che è l'elemento neutro dell'addizione, le somme di due addendi di una cifra costituiscono la tabella dell'addizione, che per la base 10 è

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Per la moltiplicazione si ha

$$a \times b = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\, 10^i\Big) \times \Big(\sum_{j=0}^{m} b_j\, 10^j\Big) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i\, b_j\, 10^{i+j}$$

Nel corso dei secoli sono state elaborate molte soluzione grafiche per facilitare i calcoli, ma in ogni caso è necessario calcolare i prodotti $a_i\, b_j$ per ogni possibile combinazione di cifre. Escludendo i prodotti per zero, i prodotti di due cifre costituiscono la tabella della moltiplicazione (detta tavola pitagorica), che in base 10 è

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

L'algoritmo che usiamo oggi procede nel modo seguente:

M: Moltiplicazione attuale

Si moltiplica, cominciando dalla destra, ogni cifra del moltiplicando $a$ per $b_0$. Si scrivono le unità di ciascun prodotto parziale e si aggiungono le decine, se ve ne sono, al prodotto parziale successivo. Si scrive l'ultimo prodotto per intero.

Per $i = 1, \ldots, m$ si ripete l'operazione moltiplicando le cifre di $a$ per $b_i$ e scrivendo i prodotti parziali ottenuti in modo che la cifra delle unità di $a\, b_i$ sia al di sotto di quella delle decine di $a\, b_{i-1}$.

Infine si addizionano i vari prodotti parziali.

Passiamo ora a considerare le operazioni inverse. Per la sottrazione $a - b$, dopo l'incolonnamento si considerano le differenze $a_i - b_i$ per ogni $i$. Se $a_i < b_i$ è richiesto il prestito di uno dalla cifra $a_{i-1}$. In ogni caso $a_i - b_i$ si ricava dalla tabella dell'addizione.

La divisione $a/b$ è l'operazione più complicata. Siano $a$ il dividendo e $b$ il divisore. Indichiamo con $q = q_n\, q_{n-1}\, \ldots, q_1\, q_0$ il quoziente intero e con $r$ il resto, tali che

$$a = b \times q + r, \quad \text{con} \quad r < b.$$

Un algoritmo per calcolare le cifre di $q$ e il resto è

---

D: Divisione attuale

---

per $i = n, \ldots, 0$ con passo $-1$ si assegnano

$$r = \begin{cases} a_n & \text{se} \quad i = n, \\ 10\,(r - b \times q_{i+1}) + a_i & \text{se} \quad i < n, \end{cases}$$

dove $q_i$ è la massima cifra per cui $d \times q_i \leq r$.

---

Al termine le eventuali prime cifre (cioè più a sinistra) uguali a zero di $q$ vengono eliminate. L'ultimo valore assegnato ad $r$ è il resto della divisione.

La maggiore difficoltà è proprio quella di trovare $q_i$ e questo passo può comportare una serie di tentativi (al limite 9 tentativi) con valori crescenti o decrescenti, fino a trovare la cifra giusta. Ogni tentativo comporta la moltiplicazione di $b$ per un numero di una cifra. Se la lunghezza del moltiplicando fosse molto maggiore di quella del moltiplicatore, potrebbe valere la pena di prepararsi a parte tutti i prodotti di $b$ per una cifra, in modo da dover eseguire solo sottrazioni.

## 3.3 Algoritmi alternativi per la moltiplicazione e la divisione

A questo punto uno si chiede se non sia possibile costruire algoritmi per la moltiplicazione e per la divisione che non richiedano la conoscenza della tavola pitagorica. Ed infatti, se si sanno addizionare e sottrarre due numeri e si sa moltiplicare e dividere per 2, si possono calcolare il prodotto $a \times b$ e il quoziente $q$ e il resto $r$ senza che sia necessario conoscere la tavola pitagorica, sfruttando la rappresentazione in base 2 di un numero.

L'algoritmo per il raddoppio (ovvero moltiplicazione per 2) e quello per il dimezzamento (ovvero divisione per 2) sono quelli soliti. Richiedono di conoscere solamente la tabellina del 2, che va comunque memorizzata.

In base 2 un numero intero positivo $a$ è espresso nella forma

$$a = c_n\, 2^n + c_{n-1}\, 2^{n-1} + \ldots + c_1\, 2 + c_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i\, 2^i, \tag{1}$$

dove le cifre $c_i$, $i = 0, \ldots, n$ possono essere uguali solo a 0 o a 1 e $c_n \neq 0$, e viene normalmente rappresentato giustapponendo le cifre nel modo seguente

$$a = (c_n\, c_{n-1}\, \ldots c_1\, c_0)_2. \tag{2}$$

Per convertire il numero $a$ dalla base 10 alla base 2 si possono usare due metodi:

- Metodo (a), delle potenze. Si scrivono le potenze di 2 con esponente crescente fino a quella che supera $a$, poi si individuano i coefficienti $c_i$. L'algoritmo per la conversione è il seguente.

C1: Conversione da base 10 a base 2 con le potenze

Si assegna $s_0 = 1$ e $i = 0$,
finché $s_i \leq a$, si assegna $s_{i+1} = 2\,s_i$ e $i = i + 1$,
si assegna $n = i - 1$ e $t_n = a$,
per $i = n, \dots, 0$ (quindi con passo $-1$)
    se $s_i \leq t_i$ si assegna $c_i = 1$ e $t_{i-1} = t_i - s_i$,
    altrimenti si assegna $c_i = 0$ e $t_{i-1} = t_i$ (per $i = 0$ non si assegna $t_{-1}$).

Per esempio, si converte da base 10 a base 2 il numero intero $a = 41$. Si costruiscono le potenze

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 8, \quad s_4 = 16, \quad s_5 = 32, \quad s_6 = 64.$$

Quindi $n = 5$. Si assegna $t_5 = 41$ e si ha

$$\begin{array}{lll} s_5 \leq t_5, & \text{quindi} \quad c_5 = 1, & t_4 = 41 - 32 = 9, \\ s_4 \not\leq t_4, & \text{quindi} \quad c_4 = 0, & t_3 = t_4 = 9, \\ s_3 \leq t_3, & \text{quindi} \quad c_3 = 1, & t_2 = 9 - 8 = 1, \\ s_2 \not\leq t_2, & \text{quindi} \quad c_2 = 0, & t_1 = t_2 = 1, \\ s_1 \not\leq t_1, & \text{quindi} \quad c_1 = 0, & t_0 = t_1 = 1, \\ s_0 \leq t_0, & \text{quindi} \quad c_0 = 1. & \end{array}$$

Si è così ottenuto $a = (101001)_2$. Con questo algoritmo la rappresentazione (2) viene ottenuta con solo raddoppiamenti, sottrazioni e confronti.

- Metodo (b), delle divisioni successive. Dalla (1) si ottiene

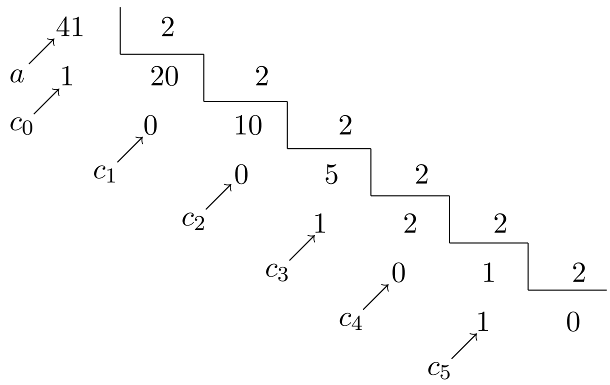
$$a = \sum_{i=0}^{n} c_i 2^i = 2\,q_1 + c_0, \quad \text{dove} \quad q_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i 2^{i-1}.$$

Quindi $q_1$ è il quoziente della divisione di $a$ per 2 e $c_0$ è il resto. Si è così ricavata l'ultima cifra della rappresentazione in base 2 di $a$. Riapplicando il ragionamento a $q_1$ si ricava $c_1$, e così via. L'algoritmo per la conversione è il seguente.

C2: Conversione da base 10 a base 2 con le divisioni

Si assegna $q_0 = a$ e $i = 0$
finché $q_i \neq 0$
    si divide $q_i$ per 2 e si assegna a $q_{i+1}$ il quoziente e a $c_i$ il resto
    $i = i + 1$.

Rispetto all'algoritmo C1, l'algoritmo C2, che richiede solo dimezzamenti, è più semplice da applicare perché non comporta confronti. Per esempio, si converte da base 10 a base 2 il numero intero $a = 41$.




La successione dei resti fornisce le cifre della rappresentazione in base 2 di $a$ a partire da quella più a destra. Quindi

$$a = (101001)_2.$$

Torniamo adesso alla moltiplicazione di $a \times b$. Di $a$ si calcola con l'algoritmo C1 la rappresentazione (2) in base 2. Poiché le cifre $c_i$ possono essere solo 0 o 1, indichiamo con $\mathcal{I}$ l'insieme degli indici $i$ per cui $c_i = 1$. Dalla (1) si ha

$$p = a \times b = b \sum_{i=0}^{n} c_i\, 2^i = \sum_{i \in \mathcal{I}} b\, 2^i.$$

Questa relazione ci suggerisce di raddoppiare successivamente $b$ e di sommare i prodotti corrispondenti agli esponenti $i \in \mathcal{I}$. L'algoritmo è il seguente.

---

M1: Moltiplicazione egizia

---

Si assegna $s_0 = 1$, $d_0 = b$ e $i = 0$,

finché $s_i \le a$, si assegna $s_{i+1} = 2\, s_i$, $d_{i+1} = 2\, d_i$ e $i = i + 1$,

si assegna $n = i - 1$, $t = a$ e $p = 0$,

per $i = n, \ldots, 0$, se $s_i \le t$ si assegna $t = t - s_i$ e $p = p + d_i$.

---

Le operazioni richieste sono solo raddoppiamenti, addizioni, sottrazioni e confronti. Il nome di egizia data a questa moltiplicazione è dovuto proprio agli egizi. Infatti questo algoritmo è quello riportato nel papiro di Ahmes per moltiplicare due numeri. Ad esempio, si calcola $p = 41 \times 39$. Come si è visto, la rappresentazione in base 2 di $a$ è $a = (101001)_2$. Quindi $p = 39 + 39\ 2^3 + 39\ 2^5$ e $\mathcal{I} = \{0, 3, 5\}$. L'algoritmo ci fornisce

$$d_0 = 39, \quad d_1 = 78, \quad d_2 = 156, \quad d_3 = 312, \quad d_4 = 624, \quad d_5 = 1248.$$

Quindi $p = d_0 + d_3 + d_5 = 39 + 312 + 1248 = 1599.$

In alternativa si possono calcolare le cifre di $a$ con l'algoritmo C2 in contemporanea ai raddoppiamenti di $b$. L'algoritmo è il seguente.

---

M2: Moltiplicazione russa

---

Si assegna $q_0 = a$, $d_0 = b$ e $i = 0$

finché $q_i \neq 0$

si divide $q_i$ per 2 e si assegna a $q_{i+1}$ il quoziente e a $c$ il resto,

si assegna $d_i = 2\, d_{i-1}$,

se $c = 1$ si assegna $p = p + d_i$,

$i = i + 1$.

---

Le operazioni richieste sono solo raddoppiamenti, dimezzamenti e addizioni. Il nome di russa data a questa moltiplicazione è dovuto al fatto che sembra che fosse usata dai contadini russi, che a loro volta potrebbero averla derivata da quella egizia.

Passiamo adesso alla divisione $a/b$, che può essere vista come l'operazione inversa della moltiplicazione e quindi essere eseguita con un algoritmo simile a quello della moltiplicazione egizia. Si vogliono calcolare il quoziente $q$ e il resto di $r$. Si costruisce la successione $d_i = b\,2^i$, con $i = 0, \dots, n+1$, dove $n$ è il primo indice per cui $d_{n+1} > a$. Si individua l'insieme $\mathcal{I}$ degli indici $i \leq n$ per cui

$$a - b < \sum_{i \in \mathcal{I}} d_i \leq a.$$

Quindi

$$a = \sum_{i \in \mathcal{I}} d_i + r = b \sum_{i \in \mathcal{I}} 2^i + r, \quad \text{dove} \quad r < b.$$

Ne segue che $q = \sum_{i \in \mathcal{I}} 2^i$ è il quoziente e $r$ il resto.

---

D1: Divisione egizia

---

Si assegna $s_0 = b$, $d_0 = 1$ e $i = 0$,

finché $d_i \leq a$, si assegna $s_{i+1} = 2\, s_i$, $d_{i+1} = 2\, d_i$ e $i = i + 1$,

si assegna $n = i - 1$, $q = 0$ e $r = a$,

per $i = n, \dots, 0$, se $d_i \leq r$ si assegna $r = r - d_i$ e $q = q + s_i$.

---

Le operazioni richieste sono solo raddoppiamenti, addizioni, sottrazioni e confronti. Per esempio, supponiamo che $a = 257$ e $b = 12$. Seguendo l'algoritmo si assegna $d_0 = 12$ e $s_0 = 1$ e si incrementa l'indice $i$ a partire da 0. Si ha

$$\begin{array}{lll}
\text{per } i = 1, & d_1 = 2\, d_0 = 24, & s_1 = 2\, s_0 = 2, \\
\text{per } i = 2, & d_2 = 2\, d_1 = 48, & s_2 = 2\, s_1 = 4, \\
\text{per } i = 3, & d_3 = 2\, d_2 = 96, & s_3 = 2\, s_2 = 8, \\
\text{per } i = 4, & d_4 = 2\, d_3 = 192, & s_4 = 2\, s_3 = 16, \\
\text{per } i = 5, & d_5 = 2\, d_4 = 384, & s_5 = 2\, s_4 = 32.
\end{array}$$

Quindi $n = 4$ e si assegna $q = 0$ e $r = 257$. Si ha

$$\begin{array}{llll}
\text{per } i = 4 \text{ è } d_4 \leq r, & \text{quindi} & r = 257 - d_4 = 257 - 192 = 65, & q = s_4 = 16, \\
\text{per } i = 3 \text{ è } d_3 \nleq r, & & & \\
\text{per } i = 2 \text{ è } d_2 \leq r, & \text{quindi} & r = 65 - d_2 = 65 - 48 = 17, & q = 16 + s_2 = 20, \\
\text{per } i = 1 \text{ è } d_1 \nleq r, & & & \\
\text{per } i = 0 \text{ è } d_0 \leq r, & \text{quindi} & r = 17 - d_0 = 17 - 12 = 5, & q = 20 + s_0 = 21.
\end{array}$$

Si sono così ottenuti il quoziente $q = 21$ e il resto $r = 5$.

Gli algoritmi C1, M1 e D1 costruiscono la sequenza $s_i$ delle potenze di 2 e sarebbero semplificati se queste potenze fossero precalcolate in una tabella. Questo non è stato fatto perché si è voluto dimostrare come sia possibile moltiplicare e dividere senza dover consultare tabelle.

## 3.4 Operazioni con numeri romani

In questo paragrafo vogliamo vedere come i romani avrebbero potuto fare i loro conti in tutta semplicità.

La sostituzione della notazione additiva romana con quella posizionale fu proposta da Fibonacci all'inizio del 13° secolo, ma incontrò notevoli resistenze e non fu completata che parecchi secoli dopo. In realtà la superiorità della rappresentazione attuale può essere apprezzata solo se la notazione viene estesa anche ai numeri frazionari.

Si è spesso detto che la notazione attuale ha preso il sopravvento sull'altra perché più adatta per l'esecuzione delle operazioni, ma questo è vero solo se si trascura l'aspetto fondamentale dell'apprendimento. Il bagaglio di conoscenze da acquisire per eseguire le operazioni con la notazione attuale è molto maggiore che quello rihiesto dalla notazione romana. Naturalmente se si dispone di algoritmi appropriati.

Per i numeri interi la notazione additiva soffre di un solo difetto: quello della minore compattezza della rappresentazione, che ha come conseguenza l'impossibilità di percepire la grandezza di un numero a colpo d'occhio. Con la notazione attuale siamo abituati (e non ce ne rendiamo neppure conto) a stabilire un rapporto di ordinamento fra due numeri in base alla lunghezza della loro rappresentazione e solo a parità di lunghezza in base al valore della prima cifra rappresentata. Invece con la rappresentazione additiva questo non può valere. Infatti il numero CCI è maggiore del numero CLXXXVIII pur avendo meno di metà delle cifre.

Con la notazione additiva uno stesso numero può essere rappresentato in molti modi diversi. Fra le diverse rappresentazioni i romani privilegiavano quella più compatta, con le cifre elencate in ordine decrescente di valore. Così ad esempio VV viene sostituita con X e XXXXX con L. Negli algoritmi che considereremo verrà utilizzata l'operazione di compattamento con cui un gruppo composto da un numero sufficiente di cifre uguali viene sostituito dalla cifra di valore maggiore. L'operazione inversa verrà chiamata di espansione e consiste nel sostituire ad una cifra la cifra di valore inferiore ripetuta il giusto numero di volte, cioè M, C ed X sono sostituite rispettivamente da DD, LL ed VV, mentre D, L ed V sono sostituite rispettivamente da CCCCC, XXXXX ed IIIII.

Una rappresentazione ancora più compatta potrebbe essere ottenuta con la notazione sottrattiva, che però non considereremo standard. Gli algoritmi che seguono non la prevedono. Se si vuole comunque usare, si deve sostituire l'eventuale rappresentazione sottrattiva dei due addendi con quella additiva, e riscrivere il risultato con la notazione sottrattiva.

L'algoritmo per l'addizione di due numeri interi può sfruttare in modo diretto la rappresentazione additiva. Si può pensare composto dei seguenti passi.

---

Ar: Addizione romana

---

Si concatenano le due notazioni,

si ordinano le cifre in modo decrescente di valore da sinistra a destra e si compattano.

---

Come si vede, il procedimento è assolutamente meccanico e può essere applicato senza nessuna ulteriore conoscenza. Per chiarire l'algoritmo, supponiamo ad esempio di voler calcolare 369+845. Per ottenere il risultato con la notazione attuale

| | |
|---|---|
| si incolonnano i due numeri | $\begin{array}{r} 369\ + \\ 845 \end{array}$ |
| si somma 9+5=14, si scrive 4 e si porta 1, | $\begin{array}{r} 369\ + \\ 845 \\ \hline 4 \end{array}$ |
| si somma 6+4+1=11, si scrive 1 e si porta 1, | $\begin{array}{r} 369\ + \\ 845 \\ \hline 14 \end{array}$ |
| si somma 3+8+1=12 e si scrive | $\begin{array}{r} 369\ + \\ 845 \\ \hline 1214 \end{array}$ |

Per ben tre volte si deve consultare la tabella dell'addizione (o fare esercizio di memoria). Vediamo invece come si procede con la notazione romana per calcolare

CCCLXIX + DCCCXLV, in notazione additiva CCCLXVIIII + DCCCXXXXV

| | |
|---|---|
| si concatenano le cifre: | CCCLXVIIIIDCCCXXXXV |
| si ordinano le cifre: | DCCCCCCLXXXXXVVIIII |
| si sostituiscono gruppi di cifre uguali: | DCCCCCCLXXXXXXIIII |
| | DCCCCCCLLXIIII |
| | DCCCCCCCXIIII |
| | DDCCXIIII |
| | MCCXIIII |

Eventualmente in notazione sottrattiva MCCXIV. Questo procedimento è più semplice che con la notazione attuale, perché non richiede la consultazione di alcuna tabella; è solo meno compatto.

L'algoritmo per la sottrazione di due numeri interi non è molto diverso. A differenza dell'addizione in cui si concatenano tutte le cifre, qui si cancellano le cifre comuni al minuendo e al sottraendo. Se qualche cifra del sottraendo non compare nel minuendo, si espande l'ultima cifra del minuendo di valore superiore a quella che manca in modo da poter procedere con la cancellazione. Ad esempio, vediamo come si procede per calcolare $124 - 49$, cioè

$$\mathsf{CXXIV} - \mathsf{XLIX}, \quad \text{in notazione additiva} \quad \mathsf{CXXIIII} - \mathsf{XXXXVIIII}$$

| | |
|---|---|
| si cancellano le cifre comuni: | C − XXV |
| si espande la C: | LXXXXX − XXV |
| si cancellano le cifre comuni: | LXXX − V |
| si espande la X: | LXXVV − V |
| si cancellano le cifre comuni: | LXXV |

Infatti il risultato deve essere 75. Per ottenere questo risultato con la notazione attuale si deve saper sottrarre 9 da 14 e 4 da 11.

L'algoritmo per il confronto segue la traccia di quello della sottrazione. Al termine, dopo aver cancellato le cifre comuni, quelle che rimangono indicano quale numero è maggiore. Ad esempio, per vedere quale fra CCI e CLXXXVIII è più grande si procede così

| | |
|---|---|
| si cancellano le cifre comuni: | C , LXXXVII |
| si espande la C e si cancellano le cifre comuni | L , XXXVII |
| si espande la L e si cancellano le cifre comuni: | XX , VII |
| si espande una X e si cancellano le cifre comuni: | XV , II |
| si espande la V e si cancellano le cifre comuni: | XIII |

Le cifre rimaste sono sotto il primo numero, che quindi risulta più grande del secondo.

Per quanto riguarda la moltiplicazione e la divisione si potrebbe pensare di tradurre in notazione romana gli algoritmi che noi usiamo con la notazione attuale, ma questo comporterebbe la costruzione della tabella della moltiplicazione in notazione romana. Gli algoritmi basati sulla notazione binaria si possono invece tradurre direttamente. Cominciamo con l'algoritmo per il raddoppio.

---

Ar: Raddoppio

---

Si sostituisce ogni cifra con due copie,
si compattano le cifre,

---

Ad esempio, per raddoppiare 126, cioè CXXVI, si procede così

| | |
|---|---|
| si raddoppiano le cifre: | CCXXXXVVII |
| si compattano le V: | CCXXXXXII |
| si compattano le X: | CCLII |

L'algoritmo del dimezzamento deve tenere conto della parità del numero.

---

Ar: Dimezzamento

---

Si raggruppano le coppie di cifre uguali, e si espandono le cifre che non fanno parte di coppie, ad esclusione di un ultimo eventuale $\mathsf{I}$, che si scrive a parte come resto,

si sostituisce ad ogni coppia di cifre uguali una sola cifra, se avanza una $\mathsf{I}$ si scrive a parte come resto.

---

Ad esempio, per dimezzare 127, cioè $\mathsf{CXXVII}$, si procede così

| | |
|---|---|
| si espandono la $\mathsf{C}$ e la $\mathsf{V}$: | $\mathsf{LLXXIIIIIII}$ |
| si dimezzano le cifre e avanza una $\mathsf{I}$: | $\mathsf{LXIII}$ e resto $\mathsf{I}$. |

Gli algoritmi M1 e M2 per la moltiplicazione e D1 per la divisione possono essere implementati in notazione romana senza ulteriori modifiche. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare $41 \times 39$, cioè $\mathsf{XXXXI} * \mathsf{XXXVIIII}$. Seguendo l'algoritmo M1 si costruiscono le potenze di 2

$$s_0 = \mathsf{I}, \quad s_1 = \mathsf{II}, \quad s_2 = \mathsf{IIII}, \quad s_3 = \mathsf{IIIIIIII} = \mathsf{VIII}, \quad s_4 = \mathsf{VVIIIIII} = \mathsf{XVI},$$
$$s_5 = \mathsf{XXVVII} = \mathsf{XXXII}, \quad s_6 = \mathsf{XXXXXXIIII} = \mathsf{LXIIII}$$

e i raddoppiamenti di $b$

$$d_0 = \mathsf{XXXVIIII}, \quad d_1 = \mathsf{XXXXXXVVIIIIIIII} = \mathsf{LXXVIII}, \quad d_2 = \mathsf{CLVI},$$
$$d_3 = \mathsf{CCLLVVII} = \mathsf{CCCXII}, \quad d_4 = \mathsf{CCCCCCXXIIII} = \mathsf{DCXXIIII},$$
$$d_5 = \mathsf{DDCCXXXXIIIIIIII} = \mathsf{MCCXXXXVIII},$$
$$d_6 = \mathsf{MMCCCCXXXXXXXXVVIIIIII} = \mathsf{MMCCCCLXXXXVI}$$

Risulta $\mathsf{XXXII} < \mathsf{XXXXI} < \mathsf{LXIIII}$, quindi si assegna $n = 5$ e $t = \mathsf{XXXXI}$ e $p = 0$ (attenzione: i romani non conoscevano lo zero). Con i successivi confronti si ha

per $i = 5$ si assegna $t = t - s_5 = \mathsf{XXXXI} - \mathsf{XXXII} = \mathsf{VIIII}$,
$p = p + d_5 = \mathsf{MCCXXXXVIII}$,
per $i = 3$ si assegna $t = t - s_3 = \mathsf{VIIII} - \mathsf{VIII} = \mathsf{I}$,
$p = p + d_3 = \mathsf{MCCXXXXVIII} + \mathsf{CCCXII} = \mathsf{MCCCCCXXXXXVIIIII} = \mathsf{MDLX}$,
per $i = 0$ si assegna $t = t - s_0 = \mathsf{I} - \mathsf{I} = 0$,
$p = p + d_0 = \mathsf{MDLX} + \mathsf{XXXVIIII} = \mathsf{MDLXXXXVIIII}$.

Il risultato 1599 è corretto.

Seguendo l'algoritmo M2 si costruiscono i quozienti e i resti delle successive divisioni per 2. La successione delle $d_i$ è quella che si è ottenuta sopra. Si ha

$q_0 = \mathsf{XXXXI}$, $d_0 = \mathsf{XXXVIIII}$ e $p = 0$,
$q_1 = \mathsf{XX}$ e $c = \mathsf{I}$, quindi $p = d_0 = \mathsf{XXXVIIII}$,
$q_2 = \mathsf{X}$ e $c = 0$,

$q_3 = \mathsf{V}$ e $c = 0$,
$q_4 = \mathsf{II}$ e $c = \mathsf{I}$, quindi $p = p + d_3 = \mathsf{XXXVIIII} + \mathsf{CCCXII} = \mathsf{CCCXXXXVIIIIII}$
$= \mathsf{CCCLI}$,
$q_5 = \mathsf{I}$ e $c = 0$,
$q_6 = 0$ e $c = \mathsf{I}$, quindi $p = p + d_5 = \mathsf{CCCLI} + \mathsf{MCCXXXXVIII} = \mathsf{MDLXXXXVIIII}$.

Ovviamente anche questo risultato è corretto.

Supponiamo ora di voler calcolare quoziente e resto della divisione 257/12, cioè $\mathsf{CCLVII}/\mathsf{XII}$. Si usa l'algoritmo D1. Si assegna $d_0 = \mathsf{XII}$ e $s_0 = \mathsf{I}$ e si incrementa l'indice $i$ a partire da 0. Si ha

per $i = 1$, $d_1 = 2\,d_0 = \mathsf{XXIIII}$, $s_1 = 2\,s_0 = \mathsf{II}$,
per $i = 2$, $d_2 = 2\,d_1 = \mathsf{XXXXVIII}$, $s_2 = 2\,s_1 = \mathsf{IIII}$,
per $i = 3$, $d_3 = 2\,d_2 = \mathsf{LXXXXVI}$, $s_3 = 2\,s_2 = \mathsf{VIII}$,
per $i = 4$, $d_4 = 2\,d_3 = \mathsf{CLXXXXII}$, $s_4 = 2\,s_3 = \mathsf{XVI}$,
per $i = 5$, $d_5 = 2\,d_4 = \mathsf{CCCLXXXIIII}$, $s_5 = 2\,s_4 = \mathsf{XXXII}$.

Quindi $n = 4$ e si assegna $q = 0$ e $r = \mathsf{CCLVII}$. Si ha

per $i = 4$ è $d_4 \leq r$, $r = \mathsf{CCLVII} - d_4 = \mathsf{CCLVII} - \mathsf{CCCLXXXIIII} = \mathsf{LXV}$, $q = s_4 = \mathsf{XVI}$,
per $i = 3$ è $d_3 \not\leq r$,
per $i = 2$ è $d_2 \leq r$, $r = \mathsf{LXV} - d_2 = \mathsf{LXV} - \mathsf{XXXXVIII} = \mathsf{XVII}$, $q = \mathsf{XVI} + s_2 = \mathsf{XX}$,
per $i = 1$ è $d_1 \not\leq r$,
per $i = 0$ è $d_0 \leq r$, $r = \mathsf{XVII} - d_0 = \mathsf{XVII} - \mathsf{XII} = \mathsf{V}$, $q = \mathsf{XX} + s_0 = \mathsf{XXI}$.

Si sono così ottenuti il quoziente $q = \mathsf{XXI}$ e il resto $r = \mathsf{V}$.

I romani usavano questi algoritmi? Probabilmente no, perché usavano l'abaco. Quello che si è voluto mostrare è che avrebbero potuto usarli, e che per certi versi queste procedure sono più semplici di quelle attuali in quanto coinvolgono solo operazioni come concatenazione, compattazione e espansione, e non richiedono l'ausilio di tabelle dell'addizione e della moltiplicazione.

Comunque, l'ipotesi che i romani non fossero in possesso di tecniche come quelle descritte sopra non può essere desunta da fonti dell'epoca. E ciò semplicemente perché non ci è non ci è pervenuto alcun documento romano analogo al papiro di Rhind degli egizi, con le descrizioni dettagliate di come venivano effettuate le operazioni. Gli autori romani nei cui scritti si trovano riferimenti matematici, Columella, Plinio il vecchio, Frontino, Vitruvio, presentavano sì problemi che richiedevano una matematica sufficientemente sofisticata, ma non davano spiegazioni di come arrivare al risultato numerico. Ad ogni modo, gli studiosi romani avrebbero potuto applicare algoritmi come quelli descritti, che risalgono agli egizi e che si erano sicuramente diffusi in tutto il mondo mediterraneo, per la mediazione della cultura greca assorbita dai romani.

## 3.5 E ora?

Gli educatori si stanno accorgendo che nei nostri studenti il senso del numero si sta erodendo. Ormai ci si fida troppo dei risultati forniti dai calcolatori. Stiamo diventando incapaci di verificare la correttezza (o anche solo la plausibilità) di quanto ci viene fornito dal calcolo automatico. La scuola si trova a dover dirimere una nuova contrapposizione: da una parte chi ritiene che i programmi scolastici di matematica debbano privilegiare il ragionamento a scapito dell'apprendimento della manualità, dall'altra chi vuole vederci più a fondo nel saper fare. Sarà la società che stiamo costruendo che deciderà come questo confronto andrà a finire. Forse verrà deciso che una conoscenza superficiale dei numeri è quanto basta per le persone comuni. Non c'è più bisogno di saper calcolare un resto, ce lo dice il calcolatore della cassa. Non c'è più bisogno di sapere quale strada scegliere fra le tante possibili, c'è il navigatore che somma le distanze e media sui consumi. Quindi si potrà devolvere ad una casta di elite la conoscenza dei numeri e di tutto quanto ne dipende. Se così dovesse avvenire, la frattura fra il livello della gente comune e quello della matematica e della scienza in generale diventerebbe ancora più profonda di quanto non sia oggi. In questo scenario si inquadra il racconto di Asimov che segue e su cui sarebbe bene meditare seriamente.

# Isaac Asimov: Nove volte Sette

Isaac Asimov (1920 – 1992) è stato un biochimico e scrittore statunitense di origine russa. Le sue opere sono considerate una pietra miliare sia nel campo della fantascienza sia nel campo della divulgazione scientifica. È autore di una vastissima e variegata produzione, stimata intorno ai 500 volumi pubblicati. (wikipedia)

*Nove volte sette*, pubblicato per la prima volta su rivista nel 1958, presenta alcuni tratti caratteristici della produzione dell'autore. Sin dall'inizio, uno dei principali obiettivi di Asimov fu di trasformare la fantascienza da genere di puro intrattenimento, privo di contenuti, in letteratura di qualità, impegnata ad affrontare i grandi problemi dell'uomo contemporaneo. Inoltre, in virtù della sua formazione di scienziato, fu tra i primi a preoccuparsi di conferire plausibilità scientifica alle sue storie, non mancando, al tempo stesso, di sottolineare i risvolti e le implicazioni del futuribile sul piano sociologico per sviluppare approfondite riflessioni su problemi cruciali come i rischi dell'inquinamento, della sovrappopolazione, dello sviluppo incontrollato delle tecnologie.

La storia ruota intorno alla figura di un piccolo contabile che, in un lontano futuro nel quale si è persa la capacità di far di calcolo a causa dell'uso quotidiano di macchine, riscopre l'aritmetica semplicemente smontando e analizzando i meccanismi delle calcolatrici. Inventa così una nuova scienza, che chiama "grafitica" che gli consente di moltiplicare e dividere i numeri utilizzando solo un foglio, una penna e la propria mente. L'abilità di eseguire le operazioni viene quindi vista come la rivincita dell'uomo sulla macchina: il cervello umano si dimostra, infatti, in grado di sostituirsi in tutto e per tutto alla tecnologia, con conseguenti enormi vantaggi soprattutto in termini di costi.

Vale la pena di notare l'aspetto, sotto qualche verso profetico, della storia, visto che è stata scritta prima che qualcuno potesse pensare anche lontanamente all'esistenza dei computer tascabili.

Titolo originale: The Feeling of Power

Prima edizione: If, febbraio 1958

Traduzione di Carlo Fruttero

========================================

Jehan Shuman era abituato a trattare con gli uomini che da molti anni dirigevano lo sforzo bellico terrestre. Non era un militare, Shuman, ma a lui facevano capo tutti i laboratori di ricerche incaricati di progettare i cervelli elettronici e gli automi impiegati nel conflitto. Di conseguenza, i generali gli prestavano ascolto. E lo stavano a sentire perfino i capi delle commissioni parlamentari.

C'erano due esemplari di entrambe queste specie nella saletta del Nuovo Pentagono. Il generale Weider aveva il volto bruciato dagli spazi e la bocca molto piccola, quasi sempre atteggiata in una smorfia. Il deputato Brant aveva guance tonde, lisce, e occhi chiari. Fumava tabacco denebiano con l'indifferenza di un uomo il cui patriottismo è notorio e che può quindi permettersi certe libertà.

Shuman, alto, elegante, e Programmatore di prima classe, li affrontò senza esitazione.

Disse: - Signori, questo è Myron Aub.

- Sarebbe lui l'individuo dotato di speciali capacità, che avete scoperto per caso? - disse il deputato Brant, senza scomporsi.

- Bene! - Con bonaria curiosità squadrò l'omettino calvo, con la testa a uovo.

L'ometto reagì intrecciando nervosamente le dita. Non era mai stato a contatto di persone così importanti in vita sua. Era un Tecnico d'infimo rango, già abbastanza avanti negli anni, che dopo aver fallito tutte le prove di selezione destinate a individuare i cervelli umani meglio dotati, s'era ormai rassegnato da anni a un lavoro oscuro e monotono. Ma poi il Grande Programmatore aveva scoperto il suo hobby e l'aveva trascinato qui.

Il generale Weider disse: - Questa atmosfera di mistero mi sembra puerile.

- Un minuto di pazienza - disse Shuman - e vedrà che cambierà idea. Si tratta di una cosa che non va assolutamente divulgata... Aub! - Pronunziò il nome monosillabico come se fosse un comando militare, ma era un Primo Programmatore e parlava a un semplice Tecnico.

- Aub! Quanto fa nove volte sette?

Aub esitò un istante. I suoi occhi smorti ebbero un fioco lampo di ansietà. - Sessantatré - disse.

Il deputato Brant inarcò le sopracciglia. - È giusto?

- Controlli lei stesso, onorevole.

Il deputato trasse la sua calcolatrice tascabile, ne sfiorò con le dita due volte il bordo zigrinato, guardò il quadrante e la ripose in tasca. Disse: - E sarebbe questo il fenomeno che lei ci ha chiamato qui ad ammirare? Un illusionista?

- Molto di più, onorevole. Aub ha mandato a memoria alcune operazioni e sa calcolare sulla carta.

- Una calcolatrice di carta? - disse il generale. Sembrava deluso.

- No, generale - disse Shuman, paziente. - Non è una calcolatrice di carta. Semplicemente un foglio di carta. Generale, vuol essere così gentile da proporre un numero qualsiasi?

- Diciassette - disse il generale.

- E lei, onorevole? - Ventitré.

- Bene! Aub, moltiplichi questi due numeri e faccia vedere a questi signori in che modo esegue l'operazione.

- Sissignore - disse Aub, chinando il capo. Trasse un taccuino da una tasca della camicia e una sottile matita da pittore dall'altra. La sua fronte era tutta aggrottata mentre tracciava faticosamente sulla carta dei piccoli segni.

Il generale Weider lo interruppe in tono asciutto.

- Mi faccia vedere.

Aub gli porse il taccuino e Weider commentò: - Be', sembra il numero diciassette.

Il deputato Brant annuì e disse: - Proprio così, ma è chiaro che chiunque può copiare dei numeri da una calcolatrice. Io stesso, credo, sarei capace di disegnare un diciassette passabile, anche senza esercizio.

- Se i signori non hanno nulla in contrario, Aub potrebbe continuare - intervenne soavemente Shuman.

Aub continuò, la mano un po' tremante. Infine disse a bassa voce: - La risposta è trecentonovantuno.

Il deputato Brant consultò una seconda volta la sua calcolatrice tascabile.

- Perdio, è esatto. Come ha fatto a indovinare?

- Non ha indovinato, onorevole - disse Shuman. - Ha calcolato il risultato. L'ha fatto su questo foglietto di carta.

- Storie - disse il generale con impazienza. - Una calcolatrice è una cosa e dei segni sulla carta un'altra.

- Spieghi lei, Aub - disse Shuman.

- Sissignore... Ecco, signori, io scrivo diciassette e subito sotto scrivo ventitré. Poi mi dico: sette volte tre...

Il deputato lo interruppe pacatamente.

- Attento, Aub, il problema è diciassette volte ventitré.

- Sì, lo so, lo so - Sì affrettò a spiegare il piccolo Tecnico - ma io comincio col dire sette volte tre perché è così che funziona. Ora, sette volte tre fa ventuno.

- E come lo sa lei? - chiese il deputato.

- Me lo ricordo. Dà sempre ventuno sulla calcolatrice. L'ho controllato innumerevoli volte.

- Questo non significa che lo darà sempre, però - disse il deputato.

- Forse no - balbettò Aub. - Non sono un matematico. Ma vede, i miei risultati sono sempre esatti.

- Vada avanti.

- Sette volte tre fa ventuno, e io scrivo ventuno. Poi tre per uno fa tre, così io scrivo tre sotto il due di ventuno.

- Perché sotto il due? - chiese il deputato Brant, secco.

- Perché... - Aub lanciò un'occhiata implorante al suo superiore. - È difficile da spiegare.

Shuman intervenne: - Direi che per il momento convenga accettare per buono il suo metodo e lasciare i particolari ai matematici.

Brant si arrese.

Aub proseguì: - Tre più due fa cinque, e perciò il ventuno diventa un cinquantuno. Ora, lasciamo stare per un momento questo numero e cominciamo da capo. Si moltiplica sette per due, che ci dà quattordici, e uno per due che ci dà due. Li scriviamo così e la somma ci dà trentaquattro. Ora se mettiamo il trentaquattro sotto il cinquantuno in questo modo, sommandoli otteniamo trecentonovantuno, che è il risultato finale.

Vi fu un istante di silenzio e il generale Weider disse: - Non ci credo. È una bellissima filastrocca e tutto questo giochetto di numeri sommati e moltiplicati mi ha divertito molto, ma non ci credo. È troppo complicato per non essere una ciarlatanata.

- Oh, no, signore - disse Aub, tutto sudato. - Sembra complicato perché lei non è abituato al meccanismo. Ma in realtà le regole sono semplicissime e funzionano con qualsiasi numero.

- Qualsiasi numero, eh? - disse il generale. - Allora vediamo. - Trasse di tasca la sua calcolatrice (un severo modello militare) e la toccò a caso. - Scriva sul suo taccuino cinque sette tre e otto. Cioè cinquemilasettecentotrentotto.

- Sissignore - disse Aub staccando un nuovo foglio di carta.

- Ora - toccò di nuovo a caso la calcolatrice - sette due tre e nove. Settemiladuecentotrentanove.

- Sissignore.

- E adesso moltiplichi questi due numeri.

- Ci vorrà un po' di tempo - balbettò Aub.

- Non abbiamo fretta - disse il generale.

- Cominci pure Aub - disse Shuman, tagliente.

Aub cominciò a lavorare tutto chino. Staccò un secondo foglio di carta, poi un terzo. Finalmente il generale trasse di tasca l'orologio e lo considerò con impazienza. - Allora, ha finito coi suoi esercizi di magia?

- Ci sono quasi arrivato, signore... Ecco il prodotto, signore. Quarantun milioni, cinquecentotrentasettemilatrecentottantadue. - Mostrò la cifra scarabocchiata in fondo all'ultimo foglio.

Il generale Weider sorrise condiscendente. Premette il pulsante di moltiplicazione sulla sua calcolatrice e attese che il ronzio dei meccanismi tacesse. Poi guardò il quadrante della minuscola macchina e disse con voce rauca dallo stupore: - Grande Galassia, l'ha azzeccato in pieno.

Il Presidente della Federazione Terrestre stentava ormai a mascherare, in pubblico, la tensione che lo rodeva e, in privato già permetteva che un'ombra di malinconia velasse i suoi lineamenti delicati, di uomo sensibilissimo. La guerra denebiana, dopo l'entusiasmo e l'unanime slancio dei primi anni, s'era rattrappita a un gioco inane di manovre e contromanovre. Sulla Terra lo scontento cresceva ogni giorno e cresceva forse anche su Deneb.

E ora il deputato Brant, capo dell'importantissima Commissione Parlamentare sull'Organizzazione della Difesa, stava allegramente e placidamente dissipando la sua mezz'ora di colloquio in chiacchiere inutili.

- Calcolare senza una calcolatrice - osservò il presidente con impazienza - È una contraddizione in termini.

- Calcolare - disse il deputato - È soltanto un sistema per elaborare dei dati. Può farlo una macchina come può farlo il cervello umano. Permetta che le dia un esempio. - E, servendosi delle capacità da poco acquisite, prese a calcolare somme e prodotti finché il presidente suo malgrado sentì nascere un certo interesse.

- E funziona sempre?

- Infallibilmente, signor Presidente. Non sbaglia un colpo.

- È difficile da imparare?

- Mi ci è voluta una settimana per impadronirmi perfettamente del sistema. Ma immagino che lei...

- Effettivamente - disse il presidente, pensoso - È un giochetto molto interessante. Ma a che cosa serve?

- A che cosa serve un neonato, signor Presidente? Sul momento non serve a nulla, ma non vede che questo è il primo passo verso la liberazione dalle macchine? Consideri, signor Presidente - il deputato si alzò e la sua voce profonda prese automaticamente le cadenze dei discorsi parlamentari - che la guerra denebiana è una guerra di calcolatrici contro calcolatrici. Le calcolatrici nemiche formano uno scudo impenetrabile di contro-missili che fermano i nostri missili, e le nostre bloccano i loro nello stesso modo. Ogni volta che noi perfezioniamo le nostre calcolatrici, i Denebiani fanno lo stesso, e ormai da cinque anni si è creato un precario e inutile equilibrio di forze. Ora noi siamo in possesso di un metodo che ci permetterà di vincere le calcolatrici, di scavalcarle, di attraversarle. Potremo combinare la meccanica del calcolo automatico con il pensiero umano, avremo per così dire delle calcolatrici intelligenti; a miliardi. Non posso prevedere esattamente quali saranno le conseguenze; ma è chiaro che questa innovazione avrà una portata incalcolabile. E se Deneb ci arriva prima di noi, sarebbe una vera catastrofe.

Con aria preoccupata il presidente disse: - Che cosa dovrei fare secondo lei?

- Conceda il pieno appoggio del governo a un piano segreto per lo sviluppo del calcolo umano. Lo chiami Progetto 63, se vuole. Io rispondo della mia commissione, ma avrò bisogno del sostegno del governo.

- Ma fin dove può arrivare il calcolo umano?

- Non c'è limite. Secondo il Programmatore Shuman, che mi ha parlato per primo di questa scoperta...

- Sì, ho sentito parlare di lui.

- Bene, il dottor Shuman mi dice che in teoria tutto ciò che sa fare una calcolatrice lo può fare anche una mente umana. In sostanza la calcolatrice non fa altro che prendere un numero finito di dati ed eseguire con essi un numero finito di operazioni. La mente umana è perfettamente in grado di ripetere il procedimento.

Il presidente rifletté per qualche istante. Infine disse: - Se lo dice Shuman, non ho motivo di dubitarne... Sarà verissimo. Almeno in teoria. Ma in pratica com'è possibile sapere in che modo lavora una calcolatrice?

Brant sorrise affabilmente. - Le dirò, signor Presidente; gli ho fatto la stessa domanda. E sembra che un tempo le calcolatrici venissero progettate e disegnate direttamente dagli esseri umani. Si trattava naturalmente di macchine molto rudimentali, dato che ciò avveniva prima che si fosse affermato il principio, ben più razionale, di affidare alle stesse calcolatrici la progettazione di calcolatrici ancor più perfezionate.

- Sì, sì. Continui.

- Il Tecnico Aub aveva uno strano hobby: si divertiva a ricostruire queste macchine arcaiche e così facendo ebbe modo di studiare il loro funzionamento e scoprì che poteva imitarle. La moltiplicazione che ho eseguito poco fa è un'imitazione del funzionamento di una calcolatrice.

- Straordinario!

- Il deputato tossì leggermente. - E c'è un'altra cosa che vorrei farle presente, signor Presidente... quanto più riusciremo a sviluppare e ad estendere questo nostro progetto, con le sue infinite applicazioni, tanto maggiore sarà la percentuale di investimenti federali che potremo distogliere dalla produzione e dalla manutenzione delle calcolatrici. Via via che il cervello umano si sostituisce alla macchina, una parte crescente delle nostre energie o delle nostre risorse può essere dedicata a impieghi pacifici e in tal modo il peso della guerra sull'uomo comune andrà decrescendo progressivamente. Ed è inutile dire quanto un fatto simile favorisca il partito al potere.

- Ah - disse il presidente. - Capisco ciò che lei intende. Bene, si accomodi, onorevole, si accomodi. Ho bisogno di riflettere sulla sua proposta... Ma intanto, mi faccia ancora vedere quel trucchetto della moltiplicazione. Vediamo se riesco a capire come funziona.

Il Programmatore Shuman non tentò di affrettare le cose. Loesser era un conservatore, un uomo molto legato alla tradizione, e aveva per le calcolatrici la stessa passione che aveva animato suo padre e suo nonno prima di lui. Controllava tutta la rete di calcolatrici dell'Europa occidentale, e ottenere il suo pieno appoggio al Progetto 63 avrebbe rappresentato un passo avanti di notevole importanza.

Ma Loesser esitava ancora. Disse: - Non vedo troppo di buon occhio quest'idea di mettere in secondo piano le calcolatrici. La mente umana è capricciosa. Una calcolatrice ci dà infallibilmente la stessa soluzione allo stesso problema, ogni volta. Chi ci garantisce che la mente umana sappia fare altrettanto?

- La mente umana, Calcolatore Loesser, non fa che manipolare dei dati. E allora non ha importanza se ad eseguire l'operazione è la mente umana o la macchina. L'una e l'altra sono semplicemente degli strumenti, dei mezzi.

- D'accordo, d'accordo. Ho studiato a fondo la sua ingegnosa dimostrazione e mi rendo conto che la mente è in grado di ripetere esattamente i procedimenti della macchina. Ma mi sembra lo stesso una cosa campata in aria. Anche ammettendo la validità della teoria, che ragioni abbiamo per credere che la teoria si possa applicare in pratica?

- Ritengo che vi siano ragioni molto valide. Gli uomini non si sono sempre serviti delle calcolatrici. Gli abitanti delle caverne, con le loro triremi, le loro scuri di pietra e le loro ferrovie, non avevano calcolatrici.

- E probabilmente non calcolavano nulla.

- Lei sa bene che non è così. Perfino la costruzione di una strada ferrata o di una ziggurat richiedeva dei calcoli, sia pure elementari, e questi calcoli venivano evidentemente eseguiti senza macchine.

- Lei intende dire che gli antichi calcolavano col metodo che lei mi ha dimostrato?

- Probabilmente no. È un fatto che questo metodo (a proposito, noi l'abbiamo battezzato grafitica, dalla vecchia parola europea grafo, cioè scrivere) deriva direttamente dalle calcolatrici, e dunque non può essere anteriore. Tuttavia i cavernicoli dovevano pur avere un loro metodo, no?

- Arti perdute! Se lei mi vuol parlare delle arti perdute...

- No, no, io non sono un fanatico delle arti perdute, anche se non posso escludere che ce ne siano state. Dopo tutto, l'uomo mangiava grano anche prima dell'idroponica, e se i primitivi mangiavano grano dovevano per forza coltivarlo nel suolo. Che altro sistema potevano avere?

- Non lo so, ma crederò nella coltura in terra quando vedrò del grano crescere direttamente dal suolo. E crederò che si possa ottenere il fuoco strofinando due schegge di pietra quando lo vedrò fare sotto i miei occhi.

Shuman divenne suadente. - Comunque sia, torniamo alla grafitica. Secondo me, va considerata un aspetto del generale processo di eterealizzazione. Il trasporto mediante veicoli più o meno ingombranti sta cedendo il posto al trasferimento diretto. I mezzi di comunicazione tradizionali diventano sempre più maneggevoli ed efficienti. Provi per esempio a confrontare la sua calcolatrice tascabile con gli enormi cervelli elettronici di mille anni fa. Perché non dovremmo fare l'ultimo passo su questa via, ed eliminare completamente le calcolatrici? Andiamo, il Progetto 63 è già in corso di realizzazione; già si registrano notevoli progressi. Ma abbiamo bisogno del suo aiuto. Se il patriottismo non basta a farle prendere una decisione, consideri la prodigiosa avventura intellettuale che ci sta di fronte.

Loesser disse in tono scettico: - Che progressi? Che potete fare oltre la moltiplicazione? Potete integrare una funzione trascendentale?

- Col tempo arriveremo anche a questo. Durante il mese scorso ho imparato ad eseguire le divisioni. Sono in grado di determinare con assoluta precisione quozienti interi e quozienti decimali.

- Quozienti decimali? Con quanti decimali?

Il Programmatore Shuman si sforzò di dare alla sua voce un tono indifferente. - Non ci sono limiti.

Loesser lo guardò sbalordito. - Senza calcolatrice?

- Mi ponga lei stesso un problema.

- Provi a dividere ventisette per tredici. Con sei decimali.

Cinque minuti dopo Shuman disse: - Due virgola zero sette sei nove due tre.

Loesser controllò il risultato. - Ma è straordinario. Le moltiplicazioni non mi avevano impressionato gran che, perché, insomma, comportano solo dei numeri interi, e avevo l'impressione che potesse trattarsi di un trucco. Ma i decimali...

- E questo non è tutto. Stiamo lavorando in una direzione che fino a questo momento è ancora segretissima e che, a rigore, non dovrei rivelare a nessuno. Comunque... Stiamo per aprire una breccia nel fronte della radice quadrata.

- La radice quadrata?

- La cosa comporta naturalmente alcuni passaggi difficilissimi e ancora non disponiamo di tutti gli elementi, ma il Tecnico Aub, l'uomo che ha inventato la nuova scienza e che è dotato di una intuizione stupefacente, in questo campo, afferma di aver quasi risolto il problema. Ed è soltanto un Tecnico. Un uomo come lei, un matematico espertissimo e con un'intelligenza superiore, non dovrebbe trovare nessuna difficoltà.

- Radici quadrate - mormorò affascinato Loesser.

- Anche cubiche. Allora, possiamo considerarla dei nostri?

Loesser gli tese di scatto la mano. - D'accordo.

Il generale Weider camminava avanti e indietro a un'estremità del lungo salone, rivolgendosi ai suoi ascoltatori con i modi di un insegnante severo che ha di fronte una classe indisciplinata. Al generale non faceva né caldo né freddo che il suo pubblico fosse composto dagli scienziati civili che dirigevano il Progetto 63. Egli era il supervisore, la massima autorità, e tale si considerava in ogni attimo della sua giornata.

Disse: - Le radici quadrate sono una bellissima cosa. Personalmente, non sono capace ad estrarle e neppure capisco le operazioni relative, ma sono certamente una bellissima cosa. Tuttavia, il governo non può permettere che il Progetto si perda appresso a quelli che alcuni di voi chiamano gli aspetti fondamentali del problema. Sarete liberi di giocare con la grafitica e adoperarla in tutti i modi che vorrete quando la guerra sarà finita; ma adesso abbiamo da risolvere dei problemi pratici della massima importanza.

In un angolo il Tecnico Aub ascoltava con dolorosa attenzione. Non era più, naturalmente, un Tecnico; lo avevano sollevato dalle sue vecchie funzioni, e destinato al progetto, con un titolo altisonante e un lauto stipendio. Ma le differenze sociali restavano, e gli scienziati d'alto rango non avevano mai accondisceso ad ammetterlo nelle loro file su un piede di parità. Né, per rendere giustizia ad Aub, egli lo desiderava. Con loro si sentiva a disagio come loro con lui.

Il generale diceva: - Il nostro obiettivo è semplice, signori; sostituire la calcolatrice. Un'astronave che può navigare nello spazio senza avere a bordo un cervello elettronico può essere costruita in un tempo inferiore di cinque volte, e con una spesa inferiore di dieci volte, a una nave munita di calcolatrice. Se potessimo eliminare le calcolatrici saremmo in condizione di costruire delle flotte cinque, dieci volte più numerose di quelle di Deneb. E al di là di questo primo grande passo, io intravedo qualcosa di ancor più rivoluzionario; un sogno, per ora; ma in futuro io vedo il missile guidato dall'uomo! Tra il pubblico si diffuse un lungo mormorio.

Il generale proseguì. - Attualmente, la nostra più grave strozzatura è data dal fatto che i missili dispongono di una intelligenza limitata. La calcolatrice che li guida può non superare certe dimensioni e un certo peso, ed è per questo che trovandosi in una situazione imprevista, di fronte a un nuovo tipo di sbarramento anti-missile, i nostri apparecchi danno risultati così mediocri. Pochissimi, come sapete, raggiungono gli obiettivi, e la guerra missilistica è ormai una continua elisione; infatti il nemico è fortunatamente nelle stesse condizioni nostre. Mentre un missile avente a bordo uno o due uomini, in grado di dirigere il volo mediante la grafitica, sarebbe molto più leggero, più mobile, più intelligente. Ci darebbe quel margine di superiorità che ci porterà alla vittoria. Inoltre, signori, le esigenze della guerra ci obbligano a tener presente anche un altro punto. Un uomo è uno strumento infinitamente più economico di una calcolatrice. I missili con equipaggio umano potrebbero essere lanciati in numero tale e in tali circostanze quali nessun generale sano di mente oserebbe mai prendere in considerazione se avesse a sua disposizione soltanto dei missili automatici...

Disse ancora molte altre cose, ma il Tecnico Aub aveva sentito abbastanza.

Nell'intimità della sua stanza, il Tecnico Aub passò molto tempo a correggere e ricorreggere la lettera che intendeva lasciare. Il testo definitivo, quando lo rilesse, suonava così:

Quando cominciai a studiare la scienza che oggi si chiama grafitica, la consideravo alla stregua di un passatempo privato. Non vedevo, in essa, altro che un divertimento stimolante, un esercizio mentale.

Quando il Progetto 63 venne istituito, io ritenevo che i miei superiori vedessero più lontano di me; che la grafitica potesse essere messa al servizio dell'umanità, potesse contribuire, per esempio, alla realizzazione di congegni veramente pratici per il trasporto individuale. Ma ora capisco che sarà usata solo per spargere morte e distruzione.

Non posso sopravvivere alla responsabilità di aver inventato la grafitica.

Lentamente, diresse verso se stesso un depolarizzatore delle proteine e, senza provare alcun dolore, cadde istantaneamente fulminato.

Erano tutti raccolti, sull'attenti, intorno alla tomba del piccolo Tecnico, mentre veniva reso omaggio alla grandezza della sua scoperta. Il Programmatore Shuman chinò solennemente il capo insieme agli altri, ma non era commosso. Il Tecnico aveva fatto la sua parte, e ormai non c'era più bisogno di lui. Certo, era stato lui a inventare la grafitica, ma ora che la nuova scienza aveva messo le ali, avrebbe continuato da sola, di trionfo in trionfo, fino al giorno in cui i missili avrebbero solcato gli spazi guidati dall'uomo. E oltre ancora.

Nove volte sette, pensò Shuman con profonda contentezza, fa sessantatré, e non ho bisogno che me lo venga a dire una calcolatrice. La calcolatrice ce l'ho nella testa.

E questo gli dava un senso di potenza davvero esaltante.

## Bibliografia

I. Asimov, Nove volte sette, in Le Meraviglie del possibile, Einaudi, Torino, 1959.

C.B. Boyer, Storia della matematica, Oscar Saggi Mondadori, 1990.

W. French Anderson, Arithmetical Computations in Roman Numerals, Classical philology, vol. 51 (1956) pp.145–150. http://www.jstor.org/stable/266725

G. Ifrah, Storia universale dei numeri, Mondadori, Milano, 1983.

V. Jacomuzzi , M.R. Miliani, A. Novajra, F.R. Sauro, Trame e temi, SEI, 2011.
http://seieditrice.com/trame-e-temi/files/2011/07/TT_NBreve_Asimov.pdf

D.W. Maher, J.F. Makowski: Literary evidence for Roman arithmetic with fractions. Class. Philology, vol. 96 (2001) pp.376–399. http://www.jstor.org/stable/1215513

Babylonian numerals.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Babylonian_numerals.html

Papiro di Rhind. http://it.wikipedia.org/wiki/Papiro_di_Rhind

Il papiro di Rhind. http://www.dm.uniba.it/ipertesto/egiziani/rhind.doc

Frazione egizia. http://it.wikipedia.org/wiki/Frazione_egizia

Greek number systems.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Greek_numbers.html

A history of Zero.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Zero.html

Laboratori sui sistemi di numerazione: Tecniche di moltiplicazione.
http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/laboratori/appunti/moltiplicazioni.pdf

Division algorithm http://en.wikipedia.org/wiki/Division_algorithm

Pillole di scienza-Aritmetica: Divisione.
http://aldoaldoz.blogspot.it/2010/07/divisione.html

La divisione egizia
http://matematicamedie.blogspot.it/2007/07/la-divisione-egizia.html

Abacus. http://en.wikipedia.org/wiki/Abacus

Roman abacus. http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Roman Arithmetic.
http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/roman/