Storia della matematica:
la risoluzione delle equazioni algebriche

O. Menchi

Indice

Introduzione

Il numero, come la forma, il colore, la collocazione nello spazio, è uno dei parametri fondamentali della descrizione del mondo che ci circonda. L'uomo, nel corso della sua evoluzione, ha sviluppato particolari abilità connesse con i numeri: in tutti i linguaggi vi sono termini che indicano quantità numeriche e in ogni cultura si usano le dita per contare. Secondo Dehaene [2], matematico e neuropsicologo francese, tutto ciò sta ad indicare che l'uomo possiede un innato *senso del numero*, alla cui rappresentazione sono deputati precisi circuiti cerebrali che si sono evoluti in modo da consentire la migliore percezione della realtà circostante.

Si può quindi ipotizzare che vi sia stata una iniziale capacità di valutare la quantità numerica e che si sia sviluppata la capacità di comparare insiemi di oggetti. Il passo successivo, quello della rappresentazione simbolica, è molto più complesso. Secondo Dehaene, la matematica effettivamente attiva nello sviluppo dell'organizzazione sociale non può che essere limitata a quella che il cervello può padroneggiare e che comprende i numeri naturali e il loro uso, mentre la matematica, in quanto disciplina basata su una costruzione logica e formale a partire da simboli astratti, può essere spiegata solo come un'accumulazione culturale che si è verificata in particolari contesti, ma che non corrisponde ad un'effettiva evoluzione della struttura fisica del cervello. Una conferma a questa teoria verrebbe proprio dalla difficoltà che molte persone hanno nei confronti della matematica come disciplina.

Uno dei problemi centrali affrontati dai matematici di ogni tempo è stato quello di calcolare le soluzioni di equazioni. Primi esempi di risoluzione di equazioni lineari sono riportati in un papiro egiziano risalente al 1650 a.C. In tavolette babilonesi sono descritti metodi per risolvere alcune equazioni di secondo e terzo grado. I greci conoscevano l'algoritmo per il calcolo iterativo della radice quadrata di un numero, noto come formula di Erone, matematico alessandrino del 2^o secolo.

Dal mondo greco ci arrivano i tre famosi problemi dell'antichità: la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio. Il primo problema, la cui soluzione secondo l'oracolo di Delo avrebbe dovuto far cessare una terribile pestilenza, consiste nel determinare il lato x del cubo il cui volume era doppio di quello dell'altare di Apollo di forma cubica e lato 1, cioè nel risolvere l'equazione

$$x^3 = 2. \tag{1}$$

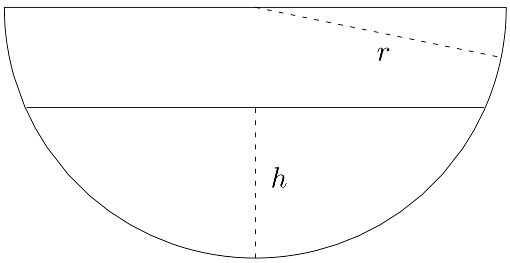
Questo problema non può essere risolto geometricamente con riga e compasso, secondo le regole della geometria classica, e richiedeva strumenti più complessi. Già

Menechmo nel 4° secolo a.C. aveva dimostrato che x poteva essere determinato incrociando due parabole. Molti secoli dopo, gli algebristi arabi avevano sostituito una delle due parabole con un cerchio. Anche il problema della trisezione dell'angolo porta ad un'equazione di terzo grado: chiamati con α l'angolo dato e con $\varphi = \alpha/3$ l'angolo da determinare, dalla trigonometria si ha che $a = 2\sin\alpha$ e $x = 2\sin\varphi$ soddisfano l'equazione

$$x^3 - 3x + a = 0 \tag{2}$$

Invece il terzo problema, che equivale a determinare π (il nome dato da Eulero nel 1739 al rapporto fra la circonferenza e il raggio del cerchio), è di tutt'altro livello, perché π è un numero trascendente, cioè non è radice di nessun'equazione algebrica a coefficienti razionali, come dimostrato da Lindemann nel 1882.

Un altro esempio di equazione di terzo grado che vale la pena di considerare è noto come *problema di Archimede* e pone il seguente quesito: dato un recipiente emisferico di raggio r, si vuole sapere qual è l'altezza h del segmento sferico, il cui volume S è la metà del volume V del recipiente.



Poiché $V = \dfrac{2}{3}\pi r^3$ e $S = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$, il valore h cercato, che deve necessariamente essere compreso fra 0 e r, soddisfa la condizione

$$\frac{S}{V} = \frac{h^2(3r-h)}{2r^3} = \frac{1}{2}\,.$$

Ponendo $x = h/r$, si ottiene l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0, \tag{3}$$

di cui si cerca una soluzione compresa fra 0 e 1.

La risoluzione numerica delle tre equazioni di terzo grado (1), (2) e (3) non era alla portata degli antichi. Occorre aspettare il cinquecento perché venga scoperto il procedimento per risolvere equazioni di terzo grado.

In questa nota vogliamo illustrare la storia della risoluzione delle equazioni algebriche in una variabile, cioè delle equazioni che si ottengono uguagliando a zero i polinomi (per economia l'aggettivo "algebrico" non verrà ripetuto, ma sarà sempre sottinteso). Le soluzioni di queste particolari equazioni vengono anche chiamate "radici", una reminiscenza dei tempi andati quando si sperava di poter esprimere le soluzioni per mezzo di radicali di vario indice. Oggi sappiamo che questo in generale non è possibile, ma tant'è, le idee possono anche modificarsi con il tempo, ma i nomi restano.

Per prima cosa faremo un passo indietro, per vedere come è stato affrontato il problema della rappresentazione dei numeri e delle operazioni su di essi, fondamentale per la costruzione di un'aritmetica sufficientemente evoluta da risolvere, oltre ai problemi pratici, anche problemi più avanzati come quelli di carattere scientifico. Pur prendendo spunto da problemi della vita reale, la matematica segue una sua direzione autonoma di sviluppo, che potremmo chiamare accademica, spesso divergente da quella richiesta dalle applicazioni pratiche. Per esempio, non si vede quale utilità concreta possano rivestire le formule risolutive delle equazioni di grado elevato (già da tre in poi). Cardano quasi 500 anni fa dava come spiegazione al suo accanimento a trovare la formula per l'equazione di terzo grado il voler dimostrare di essere più bravo degli antichi.

Bibliografia

La bibliografia sulla storia della matematica è vastissima. A partire dalla prima Encyklöpodie der Elementar-Mathematik di H.M. Weber e J. Wellstein, tre volumi pubblicati in Germania nel 1903-1907, sono state compilate molte enciclopedie di matematica in tutto il mondo. In Italia la più estesa è stata l'Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, sette volumi a cura di Luigi Berzolari, Editore Hoepli. L'opera è uscita a partire dal 1930, vi hanno contribuito 49 docenti di varie università italiane e comprende 62 capitoli, ognuno riguardante uno specifico argomento. Particolarmente esteso il capitolo sulla storia della matematica, a cura di Ettore Bortolotti.

Oggi vi sono una quantità di siti Internet di ottimo livello dedicati alla storia della matematica, a cui ci si può riferire per quel lavoro di documentazione storica che una volta veniva svolto sui manuali e sulle enciclopedie. Come per ogni altro argomento vi è il rischio di non riuscire ad orientarsi, per cui si suggerisce di partire da

History of mathematics

http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_mathematics

che contiene, oltre ad una concisa storia della matematica, un prezioso elenco di titoli e di link, come ad esempio

MacTutor History of Mathematics archive

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

creato da J.J. O'Connor e E.F. Robertson presso l'Università di St Andrews (Scotland), che contiene le biografie dettagliate di più di 1300 matematici, e

British Society for the History of Mathematics

http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/resources.html

che contiene una lista annotata di link a siti e riviste mantenuti da varie organizzazioni. Di notevole interesse per la nostra storia il link a

Earliest Uses of Various Mathematical Symbols

http://jeff560.tripod.com/mathsym.html

Il materiale riportato in questa nota è stato ripreso da alcuni libri

[1] C.B. Boyer, Storia della matematica, Oscar Saggi Mondadori, 1990.

[2] S. Dehaene, The number sense: how the mind creates mathematics, Oxford University Press, Oxford 1997.

[3] H. Dörrie, 100 great problems of elementary mathematics, their history and solution, trans. by D. Antin, Dover, New York, 1965.

[4] G. Ifrah, Storia universale dei numeri, Mondadori, Milano, 1983.

e da alcuni siti, elencati in fondo ad ogni capitolo.

Capitolo 1

La rappresentazione dei numeri

1.1 La nascita del numero

Fino a che punto siamo in grado di riconoscere a colpo d'occhio la quantità di oggetti di un insieme senza contarli? Se gli oggetti non sono disposti in modo regolare, difficilmente la percezione ci consente di distinguere più di quattro oggetti. Questa semplice constatazione ci spiega come mai alcune culture isolate non abbiano sviluppato dei termini specifici per numeri maggiori di quattro, limitandosi ad indicare tali quantità genericamente come *molti*.

Il passaggio ad una cultura numerica è quindi avvenuto per necessità. Un possibile scenario, ritenuto plausibile dagli antropologi, è quello in cui l'uomo si è trovato a contare i capi di un gregge. Se il gregge è piccolo, è facile rendersi conto a occhio se la sera tutte le pecore sono rientrate, ma se il gregge è grande questo è impossibile. Un sistema che può essere stato usato per verificare se tutte le pecore sono rientrate è quello di fare una tacca su un bastone per ogni pecora che esce la mattina dal ricovero, oppure di mettere un sassolino in un contenitore. In questo modo la sera è possibile controllare se le pecore ci sono tutte.

Alcune scoperte archeologiche forniscono una prova del fatto che l'idea di numero è molto più antica dei progressi tecnologici come l'uso dei metalli e che precede la nascita della civiltà e della scrittura: ci sono infatti pervenuti resti archeologici dotati di significato numerico che appartengono ad un periodo risalente a circa 30000 anni fa. Nel 1937 in Cecoslovacchia è stato trovato, per esempio, un osso di lupo che presenta, profondamente incise, cinquantacinque intaccature, disposte in due serie: venticinque nella prima e trenta nella seconda; all'interno di ciascuna serie le intaccature sono distribuite in gruppi di cinque.

Il procedimento sopra descritto, che all'apparenza sembra elementare e primitivo, in realtà è molto potente, perché stabilisce l'idea di una *corrispondenza biunivoca* fra insiemi ed è il fondamento logico del contare, in quanto consente di associare a una quantità di oggetti reali un concetto astratto di quantità.

Il passo successivo è quello di utilizzare parti del corpo invece che tacche o sassolini. Ricerche antropologiche hanno constatato che in molte culture, sparse in tutto il mondo, in effetti il conteggio viene fatto toccando parti del corpo in un ordine ben definito. Il conteggio più semplice è quello che fa riferimento alle dita delle mani.

L'ultima fase nel complicato processo di astrazione è quella che associa ad ogni numero una rappresentazione simbolica. Nelle diverse culture i simboli usati per rappresentare i numeri sono in stretta relazione con i materiali usati come intermediari nel conteggio (sassolini, conchiglie, bastoncelli, intagli su osso o legno, nodi su cordicelle) e con le limitazioni e le possibilità dei materiali usati per la scrittura (tavolette di argilla e stili, fogli di papiro e pennelli con inchiostro, pergamena e penne di volatile, lapidi e scalpelli).

1.2 Le cifre

La rappresentazione di un numero richiede di combinare più simboli diversi. Si potrebbe adottare un simbolo per rappresentare l'unità, ripetendolo poi tante volte quante sono le unità contenute nel numero che si vuole rappresentare, ma questo schema non consentirebbe una rappresentazione accettabile di numeri grossi. Viene quindi adottato uno schema in cui i numeri sono rappresentati con combinazioni di simboli diversi, detti *cifre*. Il numero delle cifre è in relazione con la base usata per la rappresentazione.

Oltre alla base decimale usata da molte culture antiche (ad esempio egizia, romana, indiana, cinese) e conservatasi fino a oggi, altre basi sono state usate nelle diverse culture: i celti, i baschi, e, in tutt'altre parti della terra, gli kmer, gli atzechi e i maya usarono rappresentazioni su base 20 (si pensi alla forma 80 = quatre-vingts nel francese odierno e al termine score per indicare il venti, usato da Shakespeare). Sono state trovate tracce di uso della base cinque in alcune zone dell'India. La base 60 era usata dai sumeri e dai babilonesi ed è stata acquisita nella nostra rappresentazione delle misure del tempo e degli angoli.

Il motivo per cui la base 10 ha avuto alla fine il sopravvento sulle altre risiede probabilmente nel fatto che era quella usata dai romani, che per alcuni secoli dominarono militarmente ed economicamente il mondo occidentale. Inoltre era un sistema facile da comprendere, semplice in quanto faceva uso di pochissimi simboli e per il quale erano stati inventati algoritmi di calcolo su abaco molto sofisticati. Aveva un unico svantaggio: era poco adatto per le divisioni e quindi per il calcolo tecnico e scientifico. Ma a questo gli scienziati (ad esempio Tolomeo) rimediarono utilizzando la rappresentazione in base 60, più complessa ma più efficace.

Oltre alla base, l'elemento caratterizzante della rappresentazione è la *regola della giustapposizione* delle cifre, che indica come le diverse cifre concorrono alla formazione del numero. Due sono le regole che si sono affermate:

- l'*additività*, in cui il valore del numero è dato dalla somma dei valori di tutte le cifre che lo compongono. Ad esempio, nella rappresentazione romana CLVIII = 100+50+5+1+1+1 = 158. Esiste anche una variante di questa notazione che fa uso della sottrazione, ad esempio IV = 4 o XC = 90, che però è presente come scorciatoia solo in documenti piuttosto tardi e di carattere ufficiale.

– La notazione *posizionale*, in cui la giustapposizione di due cifre corrisponde a una moltiplicazione della prima cifra per la base e all'addizione della seconda cifra, ad esempio in base 10 è $23 = 2 \cdot 10 + 3$.

La notazione posizionale richiede la nozione dello zero. I primi ad usarla, i babilonesi, non avevano una rappresentazione esplicita dello zero, ma riuscivano ad individuare la giusta collocazione delle cifre riferendosi al contesto. La rappresentazione esplicita dello zero compare nella numerazione indiana alla fine del 6° secolo, nella numerazione cinese a partire dall'8° secolo, e in quella maya fra il 3° e il 9° secolo. In ogni caso, si trattò di una notazione dotta. Solo il passaggio delle conoscenze matematiche indiane agli arabi consentì l'adozione del sistema posizionale a scopi commerciali, e il successivo passaggio in Europa nel 1200 per opera di Fibonacci.

Nell'introduzione al suo libro [3] Ifrah così si riferisce alle cifre:

"Per la loro universalità che traspare dalle molteplici soluzioni proposte al problema della numerazione, per la loro storia che converge lentamente ma sicuramente verso la formula oggi prevalsa ovunque, quella della numerazione decimale di posizione, le cifre possono testimoniare meglio e più della babele delle lingue l'unità profonda della cultura umana. Nel considerare le cifre, la prodigiosa e feconda diversità delle società e delle loro vicende si cancella davanti a un senso di continuità quasi assoluta. Le cifre non sono tutta la storia dell'uomo, ma la riuniscono, la riassumono, la percorrono da capo a capo."

Per seguire quella che è stata l'evoluzione delle cifre, bisogna innanzi tutto considerare i contesti culturali che hanno richiesto la rappresentazione dei numeri. Si tratta fondamentalmente di due contesti: uno civile e uno burocratico. Il contesto civile comprende l'organizzazione familiare, economica e sociale all'interno di piccole comunità e le transazioni commerciali che non coinvolgono l'amministrazione centrale dello stato. In questo contesto il numero è puramente funzionale, il suo uso ha connotazioni pratiche, e l'aritmetica è ridotta a poche regole (in genere solo l'addizione e la sottrazione).

Il contesto burocratico si è sviluppato in un secondo tempo quando l'evoluzione delle tecniche produttive ha consentito l'instaurarsi di stati accentratori. Nell'ottica moderna saremmo portati a pensare che l'apparato burocratico statale usasse la matematica solo per scopi amministrativi e fiscali, ma in realtà non era così nel 4° millennio avanti Cristo: il carattere sacro del sovrano permeava di sacralità anche le attività burocratiche, in qualche caso assimilando scribi e scienziati al rango di sacerdoti. Una simile burocrazia non si sarebbe potuta sviluppare senza un sistema matematico sofisticato, che rispondesse sia alle esigenze contabili di una tassazione delle transazioni commerciali e delle attività agricole e produttive (confini delle proprietà e stime della produzione), che alle esigenze religiose (amministrazione dei templi e calendari liturgici). Senza trascurare le richieste degli scienziati, come gli astronomi che dovevano studiare il moto degli astri, compilare i calendari e predire le eclissi, o gli architetti che presiedevano alla costruzione dei canali e degli edifici pubblici.

1.3 I sistemi di numerazione

Si descrivono ora i sistemi di numerazione adottati dalle grandi civiltà del passato, se ne analizzano l'evoluzione nel tempo e le loro interazioni. La civiltà che si prendono in considerazione sono quella egizia, quella mesopotamica, quella greca, quella romana, quella indiana e, infine, quella araba. Non si prenderanno in considerazione i sistemi di numerazione cinese e maya, che pur importanti in un'ottica mondiale, non hanno avuto interazioni con la storia che ci interessa.

Il sistema egizio

Gli egizi svilupparono un sistema di numerazione a base 10, usato sia nel contesto civile che in quello burocratico. Le cifre delle unità sono rappresentate con tratti verticali: un tratto per l'uno, due tratti affiancati per il due, ..., nove tratti disposti in un quadrato di 3 per 3 per il nove. Le cifre delle decine seguono la stessa disposizione di quelle delle unità, ma sono rappresentate da delle U rovesciate. Lo stesso discorso vale per le centinaia (rappresentate da spirali), per le migliaia (rappresentate da fiori di loto), e così via fino al milione, rappresentato con una figura inginocchiata, forse il dio dell'infinito.

Le rappresentazioni di numeri sono molto frequenti nei documenti egizi: gli scribi avevano una vera passione nell'elencare, ad esempio, nelle molte iscrizioni che celebravano le spedizioni vittoriose dei sovrani, il numero dei prigionieri catturati e dei capi di bestiame razziati, accuratamente distinti per specie.

Fra i papiri pervenutici è estremamante importante il papiro di Rhind, dal nome dell'antiquario scozzese, Henry Rhind, che lo acquistò nel 1858. Questo papiro, compilato da uno scriba di nome Ahmes attorno al 1660 a.C., non è scritto in caratteri geroglifici, ma in una scrittura più agile, nota come scrittura ieratica. Si tratta di un documento di carattere didattico, orientato alle applicazioni pratiche, che contiene le soluzioni di 85 problemi matematici ricorrenti nella vita quotidiana degli uomini d'affari, degli agrimensori, dei costruttori. Le regole di calcolo che vi vengono illustrate provenivano dall'esperienza del lavoro e mancano le dimostrazioni generali, a dimostrazione del fatto che gli egizi non possedevano una struttura logica deduttiva basata su assiomi.

La numerazione rimane decimale, ma il principio ripetitivo della numerazione geroglifica viene sostituito con l'introduzione di simboli speciali che rappresentano i numeri da 1 a 9 e i multipli delle potenze di 10. Così, quattro non viene più rappresentato con quattro trattini verticali, ma da una lineetta orizzontale; e sette non viene scritto con sette trattini, ma come una unica cifra simile ad una falce.

Gli egizi usavano soprattutto l'addizione e la moltiplicazione per due, con cui eseguivano moltiplicazioni e le divisioni fra interi. Erano inoltre capaci di rappresentare particolari tipi di frazioni e di operare su di esse. Le frazioni utilizzate erano quelle aventi come numeratore l'unità, la frazione $2/3$ e alcune frazioni della forma $n/(n+1)$. Per tutte avevano delle notazioni speciali. Essi conoscevano e sfruttavano il fatto che due terzi della frazione $1/p$ è la somma delle due frazioni $1/(2p)$ e $1/(6p)$ e che il doppio della frazione $1/(2p)$ è la frazione $1/p$. Una frazione generale veniva così rappresentata come somma di frazioni con l'unità al numeratore. Per facilitare questa operazione di riduzione, il Papiro di Rhind riporta una tabella che, per tutti i valori dispari di n da 5 a 101, esprime $2/n$ come somma di frazioni aventi per numeratore l'unità. Ad esempio

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}, \quad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

Le ragioni per cui una particolare forma di decomposizione venisse preferita a un'altra tra le tante possibili non sono chiare: forse la scelta, nella maggior parte dei casi, era dettata dalla preferenza degli egizi per frazioni derivate dalle frazioni $1/2$, $1/3$ e $2/3$ mediante dimezzamenti successivi.

Per gli egizi i numeri, come ogni altro ideogramma, erano espressione della parola degli dei. Questo consentiva una duplice lettura, e quindi un'interpretazione parallela, terrena e sacra, di molti testi. Ad esempio, vi erano 6 diversi geroglifici per indicare le frazioni $1/2$, $1/4$, ..., $1/64$. Accostando opportunamente questi geroglifici si otteneva la figura dell'occhio di Horus, il dio dalla testa di falcone. Narra la mitologia che l'occhio di Horus fu ferito e scomposto dal dio Seth, poi fu ricomposto, come spiegato nel Libro 17 dei Morti, dal dio con la testa di ibis Thot, originatore della matematica. L'occhio di Horus era dipinto sui sarcofagi e serviva al morto per vedere nell'aldilà. Purtroppo all'occhio ricostruito mancava un piccolo pezzetto (infatti se si sommano le 6 frazioni non si ottiene esattamente 1: manca ancora $1/64$), che Thot poteva o meno concedere al morto. Alcune cerimonie funebri avevano proprio lo scopo di implorare la benevolenza di Thot, così da permettere al defunto un sereno transito nell'aldilà.

Il sistema mesopotamico

Sulla matematica mesopotamica disponiamo di una documentazione molto più vasta che su quella egizia, grazie al diverso materiale usato, tavolette di argilla cotte al sole. Centinaia di tavolette trovate a Uruk e risalenti a circa 5000 anni fa testimoniano che a tale data la scrittura ideografica aveva raggiunto lo stadio di forme stilizzate convenzionali. In un primo tempo si usò uno stilo a forma di prisma triangolare, che più tardi venne sostituito da un altro costituito da due cilindri di diverso raggio. Con l'estremo dello stilo più piccolo si tracciava un segno verticale per rappresentare 10 unità e un segno obliquo per indicare l'unità; analogamente, un segno obliquo fatto con lo stilo più grande rappresentava 60 unità e un segno verticale 3600 unità. Per rappresentare numeri intermedi si ricorreva alla combinazione di questi segni.

Le tavolette risalenti al periodo della dinastia degli Hammurabi (1800-1600 a.C. circa) illustrano un sistema di numerazione ormai consolidato, in cui il sistema decimale era stato sostituito da quello sessagesimale. I babilonesi usavano una notazione parzialmente posizionale, in cui le cifre, rappresentate con gruppi di cunei appropriatamente spaziati, venivano lette da destra a sinistra e corrispondevano a potenze crescenti della base.

Sembra che in un primo tempo i babilonesi non disponessero di un metodo chiaro per indicare la posizione vuota, cioè non possedevano nessun simbolo per indicare lo zero. Ai tempi di Alessandro Magno era stato creato un segno speciale, consistente in due piccoli cunei disposti obliquamente, che però veniva usato solo per indicare posizioni vuote intermedie. Ciò vuol dire che i babilonesi dell'antichità non giunsero mai a un sistema le cui cifre avessero un valore posizionale assoluto.

I babilonesi estesero il principio posizionale anche alle frazioni oltre che ai numeri interi. Ad esempio, in una tavoletta è riportata un'approssimazione della radice di 2 costituita dai simboli 1; 24; 51; 10, che nella base sessagesimale corrisponde a $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} = 1.414222$ circa. In questo modo venivano a disporre di un sistema di notazione molto potente, paragonabile a quello della moderna notazione frazionaria decimale.

Al termine della civiltà babilonese il sistema a base 60 fu adottato da altre culture per i calcoli scientifici, e fu usato con questo scopo fino a quando fu sostituito dal sistema decimale. Sopravvive ancora oggi nelle misure del tempo e degli angoli.

Il sistema greco

Nel primo millennio a.C. la Grecia era politicamente divisa in diversi stati indipendenti, ciascuno con propria moneta, propria amministrazione e proprio sistema numerico. Si possono comunque individuare due sistemi numerici, che facevano entrambi uso di cifre rappresentate con lettere dell'alfabeto. Un precedente sistema grafico di origine autonoma, sviluppatosi a Creta prima del 12° secolo a.C., era stato spazzato via dall'invasione dorica.

Nel primo sistema, più antico, i numeri da uno a quattro erano rappresentati da trattini verticali ripetuti. Per gli altri numeri si usavano le lettere maiuscole iniziali del nome (a quel tempo non erano ancora state introdotte le lettere minuscole). Così la lettera Π indicava il 5 (pente), la lettera Δ il 10 (deca), la lettera H il 100 (hekaton), la lettera X il 1000 (khilioi) e la lettera M il 10000 (myrioi). Combinazione delle lettere indicavano i numeri secondo un sistema di notazione additivo a base primaria 10 e secondaria 5. Questo sistema di notazione, in uso nelle iscrizioni risalenti al periodo tra il 454 e il 95 a.C., dall'inizio dell'età alessandrina si trovò a coesistere con un successivo sistema puramente alfabetico che alla fine lo sostituì.

L'uso dell'alfabeto per rappresentare le cifre della numerazione era basato sul fatto che l'ordine dei segni alfabetici derivati da quelli fenici, adottato dai greci nel 9° secolo a.C., era rigidamente codificato (ad esempio, la sequenza corretta delle lettere ebraiche è data nella Bibbia stessa). Questo artificio consentì di usare i segni alfabetici (in caratteri minuscoli) come cifre per la numerazione. La notazione comprendeva 27 lettere: 9 per i numeri inferiori a 10, 9 per i multipli di 10 inferiori a 100 e 9 per i multipli di 100 inferiori a 1000. Si ritiene che tale notazione fosse in uso già dal 5° secolo a.C. Una delle ragioni che inducono a ricercarne le origini in un'epoca così lontana è che l'alfabeto greco dell'età classica conteneva solo 24 lettere, per cui si era reso necessario mutuare le tre lettere stigma (ς), qoppa (ϟ) e sampi (ϡ) da un alfabeto arcaico ormai obsoleto.

$1:\alpha$ $2:\beta$ $3:\gamma$ $4:\delta$ $5:\epsilon$ $6:\varsigma$ $7:\zeta$ $8:\eta$ $9:\vartheta$
$10:\iota$ $20:\kappa$ $30:\lambda$ $40:\mu$ $50:\nu$ $60:\xi$ $70:o$ $80:\pi$ $90:$ ϟ
$100:\rho$ $200:\sigma$ $300:\tau$ $400:\upsilon$ $500:\varphi$ $600:\chi$ $700:\psi$ $800:\omega$ $900:$ ϡ

Per gli altri numeri fino a 999 si usava la giustapposizione: ad esempio, il numero 123 si scriveva come $\rho\kappa\gamma$.

A partire da 10000, la notazione alfabetica seguiva un principio moltiplicativo: il simbolo di un numero intero qualsiasi da 1 a 9999, se collocato al di sopra della lettera M, o dopo di essa, separato dal resto del numero mediante un puntino, indicava il prodotto dell'intero per il numero 10000. Per rappresentare numeri ancora più grandi si poteva applicare lo stesso principio alla miriade doppia. In questo modo la notazione greca per i numeri interi era efficace e non eccessivamente ingombrante anche con i numeri grossi. Per i numeri frazionari, i greci, come gli egizi, tendevano a usare frazioni con numeratore unitario, di cui scrivevano il denominatore seguito da un accento per distinguerlo dall'intero corrispondente.

Il sistema romano

Anche l'alfabeto dei romani ha origine da quello fenicio, ma a differenza di quelle greche le cifre romane

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

malgrado la loro apparenza non hanno origine alfabetica. Tutti gli antropologi sono d'accordo sul fatto che si tratti di una stilizzazione delle tacche usate nella pratica dell'intaglio per contare. I simboli usati per 100, 500 e 1000 nei documenti più antichi erano alquanto diversi da quelli sopra indicati, e acquisirono la forma definitiva solo in epoca più tarda (la C e la M in base alla prima lettera del nome).

La notazione romana è un esempio di sistema a legge additiva in cui si usano le cifre più grandi possibili, che vengono scritte da sinistra a destra in ordine decrescente. Così 15 si scrive XV e non VVV o XIIIII. Per evitare la scrittura di lunghe successioni di simboli, in certi casi viene utilizzata anche la notazione sottrattiva: una cifra che stia immediatamente a sinistra di un'altra che indica un numero maggiore va intesa in senso sottrattivo. Vi sono alcune regole da rispettare:
(1) solo I, X e C possono essere usati in senso sottrattivo;
(2) un solo numero più piccolo può essere posto a sinistra, così, 19 può essere scritto XIX, ma 18 non può essere scritto XIIX;
(3) il numero da sottrarre non deve essere meno di un decimo del valore del numero dal quale è sottratto, così, X può essere posizionato a sinistra di C o di L, ma non a sinistra di M o di D: quindi 49 si scrive XLIX e non IL.

Il sistema indiano

Furono forse i matematici indiani a rendersi conto della applicabilità del valore di posizione alla notazione decimale per i numeri interi. Lo sviluppo della notazione numerica sembra aver seguito in India lo stesso schema che si riscontra in Grecia. Le iscrizioni del periodo più antico mostrano dapprima semplici trattini verticali, disposti a gruppi; nel 3° secolo a.C., però, era già in uso un sistema simile a quello attico. Nel nuovo schema si continuava ad usare il principio ripetitivo, ma venivano adottati nuovi simboli di ordine superiore per indicare quattro, dieci, venti e cento. Questa scrittura, detta karosthi, venne gradatamente sostituita da un'altra notazione, nota come notazione in caratteri brahmi, che presentava un'analogia con la notazione alfabetica delle cifre del sistema ionico dei greci. Per passare dalle cifre in caratteri brahmi all'attuale notazione per i numeri interi sono necessari due passi. Il primo è il riconoscimento che, attraverso l'uso del principio posizionale, le cifre indicanti le prime nove unità sono sufficienti per descrivere anche i corrispondenti multipli di dieci e ogni sua potenza. Non si sa quando sia avvenuta la riduzione a nove cifre; è probabile che tale transizione sia avvenuta in modo graduale. Va notato che il riferimento a nove cifre, anziché a dieci, implica che gli indiani non avevano ancora fatto il secondo passo verso il sistema moderno di numerazione, ossia l'introduzione di un simbolo per lo zero. Pare che la prima comparsa di uno zero in India si trovi in una iscrizione dell'876, cioè oltre due secoli dopo il primo riferimento alle altre nove cifre. È possibile che lo zero abbia avuto origine nel mondo greco (inventato nei circoli neopitagorici greci di Alessandria) e sia stato trasmesso all'India dopo che vi si era consolidato il sistema posizionale decimale. Con l'introduzione, nella notazione indiana, di un segno rotondo a forma di uovo per indicare lo zero, veniva completato il moderno sistema di numerazione per gli interi. Anche se l'aspetto delle dieci cifre era molto diverso da quello attuale, i principi di base (base decimale, notazione posizionale e simboli diversi per le dieci cifre) erano comunque acquisiti.

Il sistema arabo

All'interno dei confini dell'impero arabo vivevano popoli di origini etniche molto diverse fra loro: siriani, greci, egiziani, persiani, turchi, e gli arabi assimilarono rapidamente le loro culture. Tali differenze culturali passarono anche nella matematica araba. In alcune opere veniva usata la notazione numerica indiana, in altre occasioni adottavano lo schema di numerazione alfabetico dei greci (dove le lettere erano sostituite con quelle arabe equivalenti). La notazione indiana finì per prevalere; tuttavia, anche tra coloro che usavano quest'ultima vi erano considerevoli differenze nelle forme delle cifre usate. Le varianti erano così evidenti che alcuni studiosi hanno avanzato l'ipotesi di origini completamente diverse per le forme usate nella parte orientale, forse provenienti direttamente dall'India, e in quella occidentale, forse provenienti da forme greche o romane. Più probabilmente le varianti erano il risultato di graduali mutamenti nello spazio e nel tempo: infatti le cifre arabe usate oggi sono molto diverse dalle moderne cifre devanagari ancora in uso in India. Le nostre cifre sono note come cifre arabe, nonostante il fatto che esse presentino scarsa somiglianza con quelle in uso oggi nei paesi del mondo islamico. Sarebbe meglio dare al nostro sistema di numerazione il nome di indo-arabico.

1.4 L'uso dello zero

Lo zero, come ogni altra cifra, ha due funzioni: è una cifra della rappresentazione, al pari delle altre nove, ed è un numero a sé stante, anche più importante degli altri numeri in quanto separatore fra gli interi negativi e gli interi positivi, con sue regole specifiche di elemento neutro dell'addizione e elemento nullo della moltiplicazione. Come cifra della rappresentazione, la sua storia inizia con la prima notazione posizionale dei babilonesi e termina con l'acquisizione completa della notazione posizionale da parte del mondo occidentale nel 13° secolo, ed è caratterizzata da un alternarsi di alti e bassi, di periodi di uso e di oblio.

Solo una rappresentazione posizionale dei numeri richiede l'uso di un carattere speciale per lo zero, la rappresentazione additiva ne esclude la necessità. Ma anche la rappresentazione posizionale può con qualche difficoltà fare a meno di un carattere specifico per l'indicazione dello spazio vuoto fra cifre, come dimostra il fatto che i babilonesi usarono una rappresentazione posizionale senza lo zero per centinaia di anni e solo nel 400 a.C. introdussero un simbolo speciale per lo spazio vuoto fra cifre (ma mai in posizione estrema). Come è possibile che non facessero confusione nell'assegnare il valore corretto alle diverse cifre? Dobbiamo però ricordare che i documenti pervenutici riguardano tutti problemi specifici, come transazioni commerciali, o anche problemi simulati ma comunque riferiti a possibili casi reali, dai quali è possibile dedurre le grandezze che entrano in gioco dalle situazioni concrete descritte.

In effetti, la necessità di stimare il valore di una grandezza matematica senza fare riferimento al contesto in cui appare, non viene sentita fino a quando la matematica non acquisisce una connotazione più astratta con l'uso di una notazione simbolica. Questo passaggio è avvenuto più volte nella storia della matematica, sempre in ambienti culturalmente avanzati. Gli studiosi greci, che pure avevano grandi capacità di elaborazione astratta, non svilupparono un sofisticato sistema numerico semplicemente perché rivolsero la loro attenzione alla geometria e non all'aritmetica. Quando però si rese necessario utilizzare l'aritmetica per calcoli avanzati come quelli di carattere astronomico, non esitarono a servirsi della notazione babilonese a base sessagesimale con l'introduzione completa dello zero (cioè in posizione intermedia e terminale), come documentato nell'Almagesto di Tolomeo.

L'invenzione dello zero come cifra viene fatta risalire a circa il 650 a.C. ad opera degli indiani, ma non vi è accordo fra gli storici. È stata anche avanzata l'ipotesi che in realtà i primi documenti credibili siano posteriori al periodo in cui gli astronomi greci usavano lo zero, e che si debba dare credito a loro per questa invenzione. Il primo libro in cui comparve la notazione posizionale con l'uso dello zero è il *Brahmasphuta Siddhanta*, scritto dal matematico indiano Brahmagupta, vissuto fra il 598 e il 668. Vi si descrive un sistema che fa uso di nove cifre, da 1 fino a 9, e di un simbolo, lo 0, che indica la posizione vuota. Questa notazione indiana passa nel mondo islamico ed è documentata già nel 662 a Damasco.

Il grande matematico arabo al-Khwarizmi, vissuto fra il 780 e l'850 è l'autore di un libro dal titolo Al-jabr (da cui l'italiano Algebra), in cui descrive la numerazione con le nove cifre più lo zero, indicandola come numerazione indiana. Seguendo le conquiste arabe la notazione si espanse nei paesi lungo il Mediterraneo meridionale e risalì in Spagna. È in Algeria che Leonardo dei Bonacci, detto Fibonacci, venne a contatto sul finire del 12° secolo con la notazione delle nove cifre più lo zero. Quando rientrò in Italia scrisse un libro, il *Liber Abaci*, in cui illustrò l'uso della nuova notazione, che definì indiana. Lentamente la notazione conquistò l'Europa.

L'introduzione nella matematica occidentale dello zero come numero a sé stante richiese parecchi secoli. Se vogliamo seguirne la storia, bisogna comunque risalire al 7° secolo in India, quando Brahmagupta nel descrivere le proprietà delle operazioni aritmetiche notò che sottraendo un numero positivo da se stesso si ottiene un numero che viene identificato con lo zero. A questo punto era abbastanza naturale ampliare l'insieme dei numeri naturali con lo zero e i numeri negativi e definire le operazioni aritmetiche su di esso. Anche la moltiplicazione per zero venne definita correttamente, mentre la divisione per zero presentò difficoltà insormontabili. Duecento anni più tardi la questione non era ancora risolta: Mahavira nel suo libro *Ganita Sara Samgraha* affermò che un numero diviso per zero resta inalterato. Dopo altri trecento anni Bhaskara scriveva che una frazione con denominatore zero deve essere chiamata infinita. Sembrerebbe una posizione di compromesso accettabile, ma lo diventa molto meno se si considera che ammettendo la possibilità di scrivere frazioni della forma $n/0$ si otterrebbe il valore ∞ indipendentemente da n e quindi rimoltiplicando per 0 risulterebbe che ogni intero sarebbe uguale a ogni altro. Per il superamento definitivo di questo paradosso si dovette attendere l'introduzione dell'analisi.

Bibliografia

Il papiro di Rhind
http://www.dm.uniba.it/ipertesto/egiziani/rhind.doc

Babylonian numerals
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Babylonian_numerals.html

Greek number systems
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Greek_numbers.html

A history of Zero
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Zero.html

Capitolo 2

La matematica fino al cinquecento

Introduzione

Esaminiamo ora come si è evoluta la matematica nel corso dei secoli. Occorre però precisare che fino al 16° secolo non era disponibile il simbolismo dell'algebra, per cui i problemi che venivano proposti facevano riferimento a situazioni concrete, da considerarsi comunque come tipiche, e ad algoritmi di risoluzione espressi in stile discorsivo direttamente sui dati numerici, che però illustravano come procedere con il calcolo in problemi analoghi. Oggi siamo talmente condizionati dalla pratica di esprimere i problemi e gli algoritmi in forma simbolica, che non riusciremmo a seguire le argomentazioni proposte nella forma originale. Per questo motivo quando si parla in modo divulgativo di storia della matematica è pratica corrente trascrivere i documenti nella notazione simbolica moderna. Questo fa sì che se ne possa seguire più agevolmente lo sviluppo storico, ma nello stesso tempo si appiattiscono e si nascondono le difficoltà affrontate dai nostri antenati.

2.1 La matematica egizia

Il papiro di Ahmes elenca alcuni problemi risolubili con equazioni lineari della forma

$$x + ax = b, \qquad x + ax + bx = c,$$

con x incognita e a, b, c assegnati. Il termine usato per indicare l'incognita è *aha*, che vuol dire "mucchio". Ad esempio, un problema chiede di determinare quale sia il valore del mucchio se il mucchio più un settimo danno 19 (in notazione moderna scriveremmo $x + x/7 = 19$). Il procedimento di risoluzione proposto è simile a quello oggi noto come "metodo di falsa posizione". Si assegna a x il valore 7, al primo membro si ottiene 8, si ricava x risolvendo la proporzione $x : 19 = 7 : 8$, per cui $x = 7 \cdot 19/8$, che Ahmes scrive come $16 + 1/2 + 1/8$.

Gli egizi erano anche in grado di risolvere alcuni tipi di equazioni di secondo grado, come ad esempio di suddividere l'area di un quadrato di lato 10 in due quadrati più piccoli tali che il lato dell'uno sia pari a tre quarti del lato dell'altro (in notazione moderna, si tratta di risolvere il sistema $x^2 + y^2 = 100$, $x : y = 1 : 3/4$). Il procedimento di risoluzione proposto suggerisce di prendere un quadrato di lato 1 e un altro di lato 3/4. Si calcola l'area di quest'ultimo, che è 9/16. L'area totale dei due quadrati è quindi $1 + 9/16 = 25/16$. Si calcola la radice quadrata di questo numero, che è 5/4. Si calcola la radice quadrata di 100, che è 10. Si divide 10 per 5/4, che dà 8. Questa è la lunghezza del lato del primo quadrato. Il secondo quadrato è 3/4 di 8, cioè 6.

In un altro problema si chiede di determinare l'area di un campo circolare di cui si conosce il diametro. Dal calcolo emerge che per gli egizi l'area del cerchio era uguale a quella del quadrato avente per lato 8/9 del diametro (corrispondente a circa 3.16). Un altro problema richiede di trovare la lunghezza del lato di un cubo di cui si conosce il volume.

2.2 La matematica babilonese

Molte tavolette di argilla rinvenute nei siti archeologici testimoniano dell'alto livello di conoscenze matematiche dei babilonesi. Grazie ad una numerazione in base 60 quasi posizionale (l'uso dello zero come indicatore di una cifra mancante non era strettamente codificato), i babilonesi non avevano difficoltà a sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere per 2. Già dal 2000 a.C. possedevano le tabelle dei quadrati, dei cubi e dei reciproci degli interi. Potevano così moltiplicare due interi qualsiasi, usando una delle due relazioni

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4},$$

semplicemente come differenza di quadrati, e dividere due interi usando il reciproco

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Ad esempio, dalla tabella dei reciproci si ricava che nella base sessagesimale $1/27 = 0; 2; 13; 20$, per cui $4/27 = 0; 8; 53; 20$.

La base 60 consente la rappresentazione esatta di molte delle frazioni che compaiono nelle pratica. Naturalmente nella tabella dei reciproci mancano i reciproci di numeri che non hanno rappresentazione finita nella base 60. Ad esempio, mancano 1/7, 1/11, 1/13, che sono periodici anche nella base 60. Ma questo non creava problemi, perché lo scriba poteva usare un'approssimazione, ad esempio $1/7 \sim 0; 8; 34; 17$ con un errore di $1/7 \cdot 60^{-3} = 1/1512000$.

Tramite le tabelle dei quadrati i babilonesi potevano calcolare con sufficiente approssimazione le radici quadrate. Avevano ad esempio l'approssimazione $1; 24; 51; 10 = 30547/60^3$ per la $\sqrt{2}$, che è affetta da un errore inferiore a $6 \cdot 10^{-7}$. Purtroppo non è stata rintracciata alcuna documentazione su come questo valore sia stato ottenuto.

Molte tavolette riportano problemi di geometria su triangoli, rettangoli e cerchi che nella notazione simbolica moderna porterebbero a equazioni di secondo e terzo grado. Ad esempio, uno dei problemi proposti richiede di trovare i lati di un rettangolo la cui area è $0;45$ e la cui diagonale è $1;15$. Nella notazione simbolica, i lati x e y dovrebbero soddisfare le due equazioni $xy = 3/4$ e $\sqrt{x^2+y^2} = 5/4$. L'algoritmo suggerito richiede di calcolare nell'ordine

$$\begin{aligned}
&2xy,\quad x^2+y^2,\quad (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy,\quad x-y,\quad (x-y)/2,\\
&(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy,\quad x+y,\quad (x+y)/2,\\
&x = (x+y)/2+(x-y)/2,\quad y = (x+y)/2-(x-y)/2,
\end{aligned}$$

quindi sommando e sottraendo, moltiplicando e dividendo per 2, quadrando ed estraendo radici quadrate (con l'ausilio delle tabelle dei quadrati).

I babilonesi calcolavano la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado scritta nelle due forme

$$x^2+bx = c \quad \text{e} \quad x^2-bx = c,$$

con i coefficienti b e c positivi non necessariamente interi, con

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{b}{2}.$$

La necessità di considerare l'equazione nelle due forme distinte deriva dal fatto che i babilonesi non avevano i numeri negativi. Mediante le tabelle dei quadrati e dei cubi i babilonesi riuscivano anche ad approssimare le soluzioni delle equazioni di terzo grado della forma

$$ax^3+bx^2 = c$$

con a, b e c positivi. Si moltiplica per a^2 e si divide per b^3 ottenendo l'equazione

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3+\left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{a^2c}{b^3}.$$

Si pone $y = ax/b$, per cui l'equazione diventa $y^3+y^2 = a^2c/b^3$. Si cerca poi nelle tavole un n tale che n^3+n^2 sia il più vicino a a^2c/b^3 e poi si ricava $x = bn/a$.

2.3 La matematica greca

Nella storia della civiltà i greci occupano un posto preminente. Sebbene abbiano subito l'influenza delle civiltà che li circondavano, i greci costruirono una civiltà e una cultura che sono le più influenti sullo sviluppo della cultura occidentale moderna e in particolare della matematica quale noi la concepiamo oggi. La civiltà greca antica è durata più di mille anni fino al 7° secolo della nostra era, ma dal punto di vista della storia della matematica si usano distinguere due periodi: quello classico fino alla morte di Alessandro Magno nel 323 a.C. e quello ellenistico successivo.

La matematica greca classica si sviluppò in numerosi centri, in ognuno dei quali un gruppo di allievi portava avanti gli studi sotto la guida di un maestro. Testimonianze scritte, dirette o di poco posteriori, sul pensiero matematico sviluppato in queste scuole mancano. Quello che si può ricostruire dipende da una testimonianza posteriore di più di duecento anni, attribuita ad Eudemio di Rodi, un allievo di Aristotele, vissuto intorno al 320 a.C. che avrebbe scritto una storia della matematica, attingendo ad una tradizione orale in parte leggendaria. L'opera di Eudemio è andata perduta, ma non prima che qualcuno (non si sa chi) ne avesse fatto un riassunto parziale, citando la fonte. Anche l'originale di questo riassunto è andato perduto, ma non prima che Proclo (410-485) l'avesse trascritto nelle prime pagine del suo Commento al primo libro degli Elementi di Euclide.

La prima di queste scuole, quella ionica, fu fondata nel 6° secolo da Talete a Mileto ed ebbe tra i suoi allievi Anassimandro, Anassimene ed Anassagora. Talete (a quel tempo il merito delle scoperte di uno degli allievi della scuola era attribuito al maestro) è considerato il padre della teoria delle proporzioni, che gli avrebbe consentito di risolvere il problema, propostogli dal faraone Amasis, riguardante l'altezza della piramide di Cheope senza l'uso di strumenti. Piantata un'asta al limite dell'ombra proiettata dalla piramide, poiché i raggi del sole, investendo l'asta e la piramide formavano due triangoli, aveva dimostrato che l'altezza dell'asta e quella della piramide stanno nella stessa proporzione in cui stanno le loro ombre.

Dalla teoria delle proporzioni nasce il concetto di commensurabilità, cioè di numero razionale, come rapporto di numeri interi. La concezione che l'essenza di tutte le cose, in geometria come in tutte le questioni teoriche e pratiche, potesse essere spiegata in termini di numeri razionali, costituiva un dogma basilare anche della scuola pitagorica, fondata a Crotone da Pitagora di Samo (580-500 a.C.). Una delle scoperte più importanti attribuita a questa scuola è quella della sezione aurea, cioè la divisione di un segmento AB in due segmenti disuguali AC e CB (il primo maggiore del secondo) in modo che il rapporto di AB su AC sia uguale al rapporto di AC su CB. La sezione aurea ebbe grande fortuna ai tempi dei greci, in particolare in campo architettonico. Forse la sezione aurea era già nota ai babilonesi, per cui si pensa che i pitagorici abbiano solo stabilito la sua relazione con la costruzione del pentagono stellato.

Ad un certo punto tutto il castello di certezze matematiche crollò sotto il peso di una nuova scoperta: la commensurabilità non era in grado di spiegare neppure semplici proprietà fondamentali della geometria, come il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato. Infatti noi indichiamo tale rapporto con la $\sqrt{2}$, che non è un numero razionale. La scoperta dell'esistenza di quantità incommensurabili sembra sia dovuta ad Ippaso di Metaponto, che quindi avrebbe affrontato in modo geometrico la risoluzione dell'equazione di secondo grado $x^2 - 2 = 0$. La reazione dei pitagorici fu durissima: Ippaso fu bandito e gli fu costruito, quantunque ancora in vita, un monumento funebre. La leggenda, ripresa da Proclo, narra che per la sua empietà Ippaso morì poco tempo dopo vittima di un naufragio.

Nel primo periodo classico è difficile distinguere fra scienza e filosofia: soltanto nel 4° secolo appare una netta differenziazione della matematica. Fra la morte di Socrate nel 399 a.C. e quella di Aristotele nel 322 a.C. emergono figure importanti di matematici che avevano rapporti più o meno stretti con l'Accademia di Platone ad Atene, centro mondiale della matematica dell'epoca. La contrapposizione fra la matematica pura e quella materialistica del calcolo era argomento particolarmente caro a Platone, che bollava l'impiego di strumenti diversi dalla riga e il compasso come corruzione e distruzione della geometria. In uno dei suoi dialoghi Platone riporta una discussione fra Teodoro di Cirene e Teeteto circa la distinzione fra grandezze commensurabili e incommensurabili. Teodoro aveva dimostrato l'incommensurabilità (cioè la non razionalità) degli interi non quadrati fra 2 e 17. La scoperta che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili aveva provocato un vero scandalo perché aveva messo in dubbio i teoremi che riguardavano le proporzioni. La soluzione al problema fu data da Eudosso di Cnido, che sviluppò anche il metodo di esaustione, l'equivalente greco dell'integrazione, che servì da base per misurare le grandezze di figure curvilinee.

La conquista macedone contribuì a fondere la civiltà greca con quella orientale. Alla morte di Alessandro il suo impero si disgregò a causa delle lotte fra i suoi generali. La provincia egiziana fu assegnata a Tolomeo I, che scelse come capitale Alessandria e vi creò un ambiente favorevole al fiorire delle arti e delle scienze, che segnò l'inizio del periodo ellenistico. La geometria diventò una scienza razionale, staccata dalle esigenze applicative, volta a studiare sistematicamente e con rigore le proprietà delle figure del piano e dello spazio, ordinandole in una successione di stretta dipendenza logica. La ricerca della soluzione dei tre problemi classici influenzò profondamente la geometria e permise importanti scoperte, come le sezioni coniche e le curve di terzo e quarto grado. Ad Alessandria Euclide (325-265 a.C.), raccogliendo il patrimonio di sapere costruito dagli studiosi che lo avevano preceduto, compilò con i suoi *Elementi* il primo esempio di quello che oggi diremmo un trattato scientifico, per il metodo rigorosamente deduttivo che fa discendere ogni proposizione da proposizioni precedentemente stabilite, a partire da un nucleo iniziale di assiomi.

Ad Alessandria operò anche Apollonio di Perga (262-190 a.C.), autore di molte opere matematiche, purtroppo andate quasi tutte perdute. Ci resta il suo capolavoro, *Le coniche* scritto nel 225 a.C. Le sezioni coniche erano già note da un secolo e mezzo quando Apollonio compose il suo trattato, ma lui ebbe il merito di descrivere le proprietà dell'ellisse, della parabola e dell'iperbole in modo unitario, vedendole come sezioni di un cono a doppia falda.

Per tutta l'età ellenistica Alessandria rimase il centro degli studi matematici, ma quello che è universalmente riconosciuto come il più grande matematico di tutta l'antichità, Archimede (287-212 a.C.), non operò ad Alessandria ma assai lontano, a Siracusa.

Dopo la conquista romana, ad Alessandria la grande produzione matematica si diradò: troviamo Ipparco, indicato come il padre della trigonometria, Erone, autore di una *Metrica* in cui i problemi geometrici sono affrontati in modo pratico-numerico con procedimenti spesso approssimati, Tolomeo (100-175), autore dell'Almagesto, il più celebrato trattato di astronomia, Diofanto (200-284), indicato come il padre dell'algebra, che si occupò dei problemi connessi alla risoluzione esatta di equazioni che ammettono solo soluzioni razionali, e finalmente Pappo (290-350), autore di una *Collezione*, a coronamento della geometria greca.

Iniziò un periodo meno fertile per la matematica, fino alla decadenza con il tracollo dell'impero romano. A parte l'opera di alcuni critici come Proclo vissuto nel 5° secolo, la letteratura scientifica si ridusse a compendi sempre più miseri e frammentari. Di tutta la vasta produzione greca poche opere sopravvissero ai secoli che seguirono: gli Elementi di Euclide, le opere di Archimede, le Coniche di Apollonio, l'Arithmetica di Diofanto, l'Almagesto di Tolomeo e le Collezioni matematiche di Pappo. Vale la pena di esaminarne in dettaglio tre.

Gli Elementi di Euclide

Gli Elementi di Euclide, la maggiore opera matematica greca che ci sia pervenuta, costituiscono il più autorevole manuale di matematica di tutti i tempi. L'opera fu composta ad Alessandria verso il 300 a.C. e da allora fu copiata ripetutamente. Della versione originale però non ci è pervenuta nessuna copia. Quella che ci è pervenuta è una versione compilata quasi 700 anni dopo, rimaneggiata con cambiamenti e aggiunte da Teone, attraverso traduzioni arabe, che in seguito vennero tradotte in latino nel 12° secolo. La prima edizione a stampa degli Elementi uscì a Venezia nel 1482 e fu uno dei primi libri stampati.

Gli Elementi abbracciano tutta la matematica elementare: l'aritmetica (la teoria dei numeri), la geometria sintetica (dei punti, delle linee, dei piani, dei cerchi e delle sfere) e l'algebra (non nel senso moderno dell'algebra simbolica, ma di un equivalente in termini geometrici). L'arte del calcolo non vi è inclusa perché non faceva parte dell'educazione superiore. Gli Elementi sono divisi in tredici libri, dei quali i primi sei riguardano la geometria piana elementare, i tre successivi la teoria dei numeri, il decimo gli incommensurabili e gli ultimi tre la geometria solida. Per quanto riguarda la teoria dei numeri,

(1) vengono definiti diversi tipi di numeri: dispari e pari, primi e composti, piani e solidi, infine quelli perfetti.

(2) Viene enunciata la regola nota come *algoritmo di Euclide* per trovare il massimo comune divisore di due numeri, e indicato come trovare il minimo comune multiplo.

(3) Si trattano i numeri in progressione geometrica e le proprietà dei quadrati e dei cubi.

(4) Viene enunciato e dimostrato il più famoso teorema: *I numeri primi sono più di una qualsiasi assegnata moltitudine di numeri primi.* In altri termini, Euclide presenta qui la nota dimostrazione elementare del teorema secondo cui esistono infiniti numeri primi.

(5) Viene data una formula per la somma di numeri in progressione geometrica.

(6) Viene data la formula per i numeri perfetti: se tanti numeri quanti ne vogliamo, a cominciare dall'unità, vengono posti continuamente in proporzione doppia fino a che la somma di tutti i numeri non diventi un numero primo, e se la somma viene moltiplicata per l'ultimo numero, il prodotto sarà un numero perfetto. Euclide non dà alcuna risposta alla domanda inversa, ossia se la sua formula fornisca o no tutti i numeri perfetti. Sappiamo oggi che tutti i numeri perfetti pari sono del tipo euclideo, ma la questione dell'esistenza di numeri perfetti dispari costituisce ancora

un problema irrisolto, visto che la ventina di numeri perfetti oggi noti sono tutti pari.

L'opera di Archimede

Scarsi sono i particolari sulla vita di Archimede, ma possiamo ricavare qualche informazione su di lui dalle storie di Plutarco, Livio e altri autori. Plutarco, descrivendo l'assedio di Siracusa da parte dei romani durante la seconda guerra punica, ci dice che Archimede inventò ingegnose macchine da guerra per tenere lontano il nemico. Nel 212 a.C. durante il saccheggio della città, Archimede venne trucidato da un soldato romano, nonostante che il generale Marcello avesse dato l'ordine di salvargli la vita.

Fra i tanti trattati che ci sono pervenuti, particolarmente importante è quello sulla misura del cerchio con la dimostrazione, mediante il metodo di esaustione, del teorema secondo cui l'area del cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo che abbia come lati la circonferenza e il raggio del cerchio stesso. Nel suo calcolo approssimato del rapporto tra circonferenza di un cerchio e diametro, Archimede diede prova della sua abilità nel calcolo. Partendo dall'esagono regolare inscritto, egli calcolò i perimetri dei poligoni ottenuti raddoppiando successivamente il numero dei lati fino a raggiungere novantasei lati. Il risultato dal calcolo relativo alla circonferenza era costituito da un'approssimazione del valore di π espressa dalla disuguaglianza $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$, che era un valore più preciso di quello ottenuto dagli egiziani e dai babilonesi.

È pervenuto anche il trattato sulle spirali, che si inquadra nella scia delle ricerche tipiche della matematica greca, volte a trovare le soluzioni dei tre famosi problemi classici. La spirale si presta facilmente a effettuare molteplici sezioni dell'angolo e nel caso della quadratrice può anche servire a quadrare il cerchio.

Al tempo in cui scriveva Archimede, le sezioni coniche erano note da quasi un secolo, e tuttavia non era stato fatto nessun progresso nel calcolo delle loro aree. Archimede riuscì a dimostrare per mezzo del metodo di esaustione che l'area di un segmento parabolico è uguale a quattro terzi dell'area di un triangolo avente la stessa base e uguale altezza.

Archimede è considerato da molti storici della matematica come uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Con il metodo di esaustione aveva ottenuto una grande quantità di risultati, fra cui un'accurata approssimazione di π; aveva inventato un sistema di tipo esponenziale per esprimere i numeri grandi; in meccanica è considerato il fondatore della statica e dell'idrostatica.

L'aritmetica di Diofanto

L'opera principale di Diofanto, che operò ad Alessandria nel 3° secolo, è l'*Arithmetica*, un trattato originariamente in tredici libri, di cui ci sono pervenuti solo i primi sei e in cui è presentata essenzialmente una nuova branca matematica. Per il fatto che in essa non compaiono metodi geometrici, assomiglia in larga misura all'algebra dei babilonesi; tuttavia mentre i matematici babilonesi si erano interessati prevalentemente della soluzione approssimata di equazioni determinate fino al terzo grado, l'Arithmetica di Diofanto è quasi esclusivamente dedicata alla soluzione esatta di equazioni sia determinate che indeterminate. Per il rilievo che viene dato nell'Arithmetica alla soluzione di problemi indeterminati, la disciplina che tratta questo argomento, noto anche come analisi indeterminata, ha ricevuto il nome di *analisi diofantea*.

Diofanto fa uso sistematico di abbreviazioni per indicare potenze di numeri e per esprimere relazioni e operazioni. Un'incognita viene rappresentata da un simbolo simile alla lettera greca ζ; il quadrato di tale incognita si presenta come Δ^r, il cubo come K^r, la quarta potenza, che viene chiamata quadrato-quadrato, viene rappresentata da $\Delta^r\Delta$, la quinta potenza o quadrato-cubo da ΔK^r, e la sesta potenza o cubo-cubo da K^rK. Diofanto era a conoscenza delle regole di combinazione equivalenti alle nostre regole per gli esponenti e possedeva termini specifici per indicare i reciproci delle prime sei potenze dell'incognita, quantità equivalenti alle nostre potenze negative. I coefficienti numerici venivano scritti dopo i simboli indicanti le potenze con le quali essi erano associati; l'addizione di termini veniva rappresentata mediante l'appropriata giustapposizione dei simboli indicanti i termini e la sottrazione da una lettera collocata davanti ai termini da sottrarre. Mediante tale notazione Diofanto era in grado di scrivere polinomi a una incognita in forma quasi altrettanto concisa di quella che usiamo oggi. L'algebra greca non era più limitata alle prime tre potenze: nell'opera di Diofanto compaiono le identità

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

che svolsero un ruolo importante nell'algebra medievale e nella trigonometria.

L'Arithmetica consiste essenzialmente in una raccolta di 150 problemi, tutti formulati in termini di esempi numerici specifici, anche se intendevano esemplificare un metodo generale. I suoi numeri sono interamente astratti e non si riferiscono a misure di grano o a dimensioni di terreni o a unità monetarie, come avveniva nell'algebra egizia e mesopotamica. Inoltre egli si interessava solo di soluzioni razionali esatte, mentre i babilonesi accettavano approssimazioni di soluzioni irrazionali di equazioni.

Non vi è uno sviluppo a partire da postulati, né viene fatto alcuno sforzo per trovare tutte le soluzioni possibili. Nel caso di equazioni di secondo grado con due radici positive, viene data solo quella maggiore, mentre non vengono riconosciute radici negative. Non viene fatta alcuna netta distinzione tra problemi determinati e problemi indeterminati, e anche in quest'ultimo caso, quando il numero delle soluzioni è illimitato, viene data una sola soluzione. Diofanto risolveva problemi che comportavano parecchie incognite esprimendo ingegnosamente tutte le quantità incognite in termini di una sola di esse.

Diofanto ha influito sulla moderna teoria dei numeri più di qualsiasi altro algebrista greco che non abbia fatto uso di metodi geometrici. In particolare, Fermat giunse alla scoperta del suo famoso *ultimo teorema* muovendo dal tentativo di generalizzare un problema letto nella Arithmetica di Diofanto: dividere un quadrato dato in due quadrati.

2.4 L'aritmetica dall'India all'Europa

La diffusione del sistema di numerazione indo-arabico in Europa è legata essenzialmente a due nomi: Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi (790-850), matematico e astronomo vissuto a Baghdad, e Leonardo Pisano (1170-1250), detto Fibonacci (abbreviazione di filius Bonacci), che per seguire il padre nei suoi impegni, aveva viaggiato in Egitto, Siria, Grecia e Algeria, dove era venuto a contatto con i metodi algebrici arabi.

L'opera più importante di al-Khuwarizmi, *al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, ha fornito alle lingue moderne un termine d'uso popolare: algebra. Oltre a questa, egli scrisse un'opera di aritmetica di cui ci è pervenuta soltanto la traduzione latina recante il titolo *De numero indorum*, che descrive in modo completo il sistema di numerazione indiano (da come cambia il valore del numero cambiando di posto, all'importanza dello zero, alle operazioni basate su questo sistema). L'algebra di al-Khuwarizmi ebbe una grossa influenza sui matematici europei del Medioevo, grazie alla sua traduzione in latino fatta da Roberto di Chester prima e da Gerardo da Cremona poi.

Leonardo Pisano, rientrato a Pisa dopo i suoi viaggi e i suoi studi nel mondo arabo, publicò nel 1202 il *Liber abaci*, in cui vengono discussi in maniera esauriente metodi e problemi algebrici, difendendo decisamente l'uso delle cifre indo-arabiche. Nel libro (in latino) descrive *le nove figure indiane* insieme al segno 0 e le regole per operare su di esse. Dopo aver spiegato i procedimenti aritmetici, compresa l'estrazione di radici, si addentra in problemi relativi a transazioni commerciali, usando un complicato sistema di frazioni nel calcolo di cambi di monete. Purtroppo, il principale vantaggio della notazione posizionale, la sua applicabilità alle frazioni, è sfuggito a coloro che usarono le cifre indo-arabiche durante il primo millennio della loro esistenza. Anche Fibonacci, nella sua opera, usa le frazioni a numeratore unitario e presenta tavole di conversione per esprimere le frazioni comuni in termini di frazioni a numeratore unitario. Per esempio, la frazione 98/100 viene trasformata in $1/100 + 1/50 + 1/5 + 1/4 + 1/2$ e la frazione 99/100 viene trasformata in $1/25 + 1/5 + 1/4 + 1/2$.

Per quanto l'Europa occidentale si dimostrasse aperta verso la matematica araba, l'abbandono del vecchio sistema numerico romano, avvenne molto lentamente, forse perché era abbastanza diffuso il calcolo con l'abaco che era semplice con il vecchio sistema, ma non con il nuovo. Malgrado la popolarità del libro di Fibonacci tra gli studiosi, il primo manoscritto francese ad usare il nuovo sistema di numerazione fu scritto nel 1275 e solo nel 16° secolo esso fu definitivamente adottato.

2.5 Le equazioni

Il concetto del numero come entità essenzialmente intera era centrale alla matematica pitagorica e su di essa si basava tutto il concetto di misura (geometrica) attraverso la commensurabilità. Ma questa elegante costruzione mostrò i suoi limiti nel momento in cui si dimostrò che il lato e la diagonale del quadrato non erano commensurabili. Occorsero secoli perché si accettasse che numeri razionali e non razionali potessero coesistere.

Il passo successivo sarebbe stato l'inclusione dei numeri negativi. A noi moderni sembra ovvio che se si toglie un numero più grosso da uno più piccolo il risultato sia un numero negativo, ma questo atteggiamento è accettabile solo se vi è una sufficiente formalizzazione delle notazioni e dei problemi matematici. Una cosa è dire: "Quanto fa $a - b$?" e una cosa è dire "Se tolgo 5 cose da un insieme di 3 cose, quante ne restano?" Ma non si possono togliere 5 cose se ne abbiamo meno. Conseguenza: i problemi che portavano a soluzioni non positive venivano semplicemente scartati in quanto non ritenuti di utilità pratica. Solo la rappresentazione dei numeri come punti di una retta ordinata giustifica l'esistenza dei numeri negativi, ma per questa interpretazione geometrica bisognava aspettare ancora molti secoli.

Si afferma che gli egizi e i babilonesi erano in grado di risolvere equazioni di primo e secondo grado, nel senso che disponevano di metodi per risolvere problemi che, con la nostra terminologia, danno luogo a equazioni di primo e secondo grado. In realtà però essi erano molto lontani dal concetto di equazione.

Il concetto di equazione, come lo intendiamo oggi, nasce e si sviluppa nel mondo arabo. Al-Khuwarizmi introduce i termini *al-jabr* che significava *restaurazione* o *completamento* e si riferiva alla trasposizione dei termini sottratti da un membro all'altro dell'equazione, e *muqabalah* che significava *riduzione* o *equilibrio* e indicava la cancellazione dei termini simili che compaiono in entrambi i membri di una equazione. Vengono distinti sei tipi di equazioni di primo e secondo grado formate dalle tre quantità radici, quadrati e numeri:

1. quadrati uguali a radici: $x^2 = x$,
2. quadrati uguali a numeri: $x^2 = a$,
3. radici uguali a numeri: $x = a$,
4. quadrati e radici uguali a numeri: $x^2 + ax = b$,
5. quadrati e numeri uguali a radici: $x^2 + a = bx$,
6. quadrati uguali a radici e numeri: $x^2 = ax + b$,

in cui ai parametri a e b sono forniti valori positivi, e per ogni equazione al-Khuwarizmi dà la regola per calcolare la soluzione positiva, seguita da una dimostrazione geometrica di completamento del quadrato.

Ecco come veniva risolto il problema

un quadrato e 10 *radici sono uguali a* 39 *unità*

(nella notazione moderna, l'equazione è $x^2 + 10x = 39$). La soluzione veniva così calcolata: prendere metà delle radici (e cioè 5), moltiplicare tale quantità per se stessa (si ottiene 25) e aggiungere questo quadrato sia al primo che al secondo membro. Si è così ottenuta l'equazione $x^2 + 10x + 25 = 64$. Si riconosce che al primo membro si è formato un quadrato perfetto e si estrae la radice quadrata da entrambi i membri. Si ottiene l'equazione $x + 5 = 8$ e quindi la soluzione 3. La soluzione corrispondente all'altra determinazione della radice quadrata non viene considerata.

L'altro grande matematico arabo che ha profondamente influenzato la matematica occidentale è Omar Khayyam, che nel 1070 pubblicò a Samarcanda il *Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami.* In questo libro, tradotto come il "Trattato sulla dimostrazione dei problemi di algebra", la trasformazione dei problemi geometrici in problemi algebrici e viceversa viene impostata in modo molto generale, fino a ricondurre a equazioni di terzo grado, per cui vengono proposte soluzioni geometriche o numeriche approssimate. Khayyam stabilisce che l'equazione di terzo grado può essere risolta usando le coniche, ma non è risolvibile servendosi esclusivamente di riga e compasso, in tal modo anticipando un risultato di 750 anni dopo.

Ecco come veniva risolta l'equazione (nella notazione moderna della geometria analitica)

$$x^3 + a^2x = b.$$

(1) si traccia la parabola $x^2 = ay$,
(2) posto $c = b/(2a^2)$, si traccia la circonferenza di centro $(c, 0)$ e raggio c,
(3) chiamato P il punto di intersezione della parabola con la circonferenza diverso dall'origine, l'ascissa di P è la soluzione dell'equazione cubica data.
È facile verificare che la soluzione proposta è corretta.

Anche Fibonacci negli ultimi due capitoli del Liber abaci espone la classificazione araba delle equazioni di primo e secondo grado e spiega i metodi di falsa posizione e doppia falsa posizione. Il primo era già utilizzato dagli egizi, il secondo, introdotto dagli arabi, veniva utilizzato per la risoluzione di equazioni lineari del tipo $ax+b = c$. Gli esempi specifici venivano risolti algebricamente e dimostrati geometricamente.

Una nuova fase della matematica incomincia in Italia attorno al 1500. Infatti, nel 1494, appare la prima edizione della *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* di Luca Pacioli. La Summa è una grandiosa compilazione, scritta in volgare, di materiali appartenenti a quattro campi diversi della matematica: aritmetica, algebra, geometria euclidea molto elementare e registrazione a partita doppia. La sezione sull'algebra comprende la soluzione canonica delle equazioni di primo e di secondo grado. Sebbene sia priva della notazione esponenziale, presenta un largo uso di notazioni abbreviate: *ae* per aequalis, p e m per somma e sottrazione, R_v per radice, *co* per cosa (cioè l'incognita), *ce* per censo (il quadrato dell'incognita), *cece* per quarta potenza dell'incognita. Ad esempio

$$1.co.m.R_v.1.ce.m.36 \quad \text{sta per} \quad x - \sqrt{x^2 - 36}.$$

Oltre ai cambiamenti apportati nel campo delle notazioni, la Summa ha stimolato, direttamente o indirettamente, la ricerca delle soluzioni delle equazioni di terzo grado che Pacioli credeva non potessero essere risolte algebricamente.

Comunque non si deve pensare che la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado sia stata scoperta dal nulla nel 1500. Già prima gli algebristi italiani avevano elaborato algoritmi per calcolare le radici cubiche e quindi per risolvere equazioni della forma $x^3 = k$ e per traslazione $(x + h)^3 = k$.

2.6 La risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado

Le formule risolutive delle equazioni di terzo e quarto grado furono pubblicate per la prima volta da Girolamo Cardano (1501-1576). La loro storia però costituisce un vero romanzo, i cui protagonisti sono:

Scipione del Ferro, professore di matematica all'Università di Bologna,

Antonio Maria Flor, allievo di del Ferro,

Niccolò Fontana, detto Tartaglia a causa della balbuzie provocata da una sciabolata ricevuta durante l'assalto di Brescia da parte di truppe francesi nel 1512, che lo aveva reso inadatto all'insegnamento,

Gerolamo Cardano, figlio illegittimo, astrologo e giocatore incallito, professore di matematica a Bologna e a Milano,

Ludovico Ferrari, allievo di Cardano,

Annibale della Nave, genero di del Ferro e suo successore alla cattedra di Bologna.

La storia: nel 1526, ormai in fin di vita, Scipione del Ferro comunicò a Flor la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado, che aveva scoperto fin dal 1515, ma che aveva sempre tenuta nascosta. Flor non fece mistero di questa conoscenza e Tartaglia, che già lavorava al problema, stimolato da questa voce, riuscì a trovare anche lui una formula risolutiva e diffuse la notizia. A questo punto, il 22 febbraio 1535, venne indetta una disfida matematica fra Flor e Tartaglia, in cui ciascun contendente proponeva all'altro trenta problemi da risolvere in un certo tempo. Quando arrivò il giorno stabilito, Tartaglia aveva risolto tutti i problemi proposti da Flor, mentre Flor non aveva risolto neppure uno dei problemi proposti da Tartaglia.

La spiegazione di questo risultato sta nel fatto che la formula risolutiva nota a Flor si applicava a equazioni della forma $x^3 + px = q$, mentre quella trovata da Tartaglia risolveva equazioni della forma $x^3 + px^2 = q$. Tartaglia aveva proposto tutte equazioni di questa seconda forma, che Flor non sapeva ricondurre alla prima forma. Invece le equazioni proposte da Flor erano tutte della prima forma e Tartaglia sapeva come passare da una forma all'altra.

Venuto a sapere della vittoria su Flor, Cardano invitò Tartaglia a recarsi da lui a Milano, con la promessa di trovargli un mecenate. Nel 1539 Tartaglia, che non aveva fonti di reddito stabili, accettò l'invito e rivelò a Cardano la formula che aveva trovato, facendogli giurare che non l'avrebbe pubblicata, perché intendeva farsi un nome con la pubblicazione in un suo trattato di algebra.

In attesa che questo trattato vedesse la luce, Cardano e il suo allievo Ferrari lavorarono sulla formula, ne dettero una dimostrazione rigorosa e Ferrari riuscì a estendere la formula al caso dell'equazione di quarto grado. Erano ormai passati sei anni e Cardano, che diventava sempre più impaziente, si recò a trovare Annibale della Nave. Non si sa con quali argomentazioni Cardano riuscì a farsi mostrare il manoscritto originale di del Ferro, in cui oltre alla formula risolutiva per l'equazione di terzo grado nella prima forma era annotata anche la formula per l'equazione nella seconda forma.

A questo punto Cardano si sentì svincolato dal giuramento che aveva fatto a Tartaglia e nel 1545 pubblicò la sua opera *Artis Magnae sive de regulis algebraicis*, rimasta famosa proprio perché forniva le soluzioni delle equazioni di terzo e quarto grado. In essa comunque era correttamente attribuita la paternità delle formule rispettivamente a del Ferro, a Tartaglia e al Ferrari. Questo però non bastò a Tartaglia, che pure aveva pubblicato, come se fossero opera sua, risultati di altri matematici suoi contemporanei senza dichiararne la fonte. Tartaglia andò su tutte le furie e offese pubblicamente Cardano, chiamandolo "homo di poco sugo". Ferrari intervenne in difesa del suo maestro con una disfida matematica e riuscì a umiliare Tartaglia. Tartaglia uscì così di scena, mentre Cardano e Ferrari divennero famosi, ma anche loro non ebbero grande fortuna. Un figlio di Cardano fu condannato a morte per l'assassinio della moglie, un altro suo figlio lo derubò per saldare i suoi debiti di gioco. Il Cardano stesso fu imprigionato come eretico per aver calcolato l'oroscopo di Gesù Cristo. Ferrari, dopo aver perso le dita di una mano in una rissa, morì avvelenato, probabilmente da una sorella per una questione di eredità. Fine della storia.

Nel cinquecento ancora i numeri negativi erano mal compresi e i coefficienti negativi non venivano mai usati nelle equazioni. Ad esempio l'equazione $x^3-2x+3=0$ sarebbe stata scritta come $x^3+3=2x$. Quindi vi erano altrettanti tipi di equazioni del terzo grado quante erano le possibilità che i segni dei coefficienti fossero positivi o negativi. Nell'Ars magna tutti i casi vengono laboriosamente discussi in dettaglio, a seconda che i termini dei vari gradi compaiano nello stesso membro o in membri opposti dell'equazione. Prima di seguire i ragionamenti di Cardano è opportuno vedere come le formule risolutive vengano ricavate con la attuale notazione simbolica.

2.6.1 Le formule risolutive con la notazione simbolica

Data l'equazione di terzo grado

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{2.1}$$

per prima cosa si fa una trasformazione di variabile $x = y + h$, con h tale che nell'equazione che si ottiene manchi il termine di secondo grado. Si ha

$$\begin{aligned} p(y+h) &= (y+h)^3 + a_2(y+h)^2 + a_1(y+h) + a_0 \\ &= y^3 + (3h+a_2)y^2 + (3h^2 + 2ha_2 + a_1)y + h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0. \end{aligned}$$

Ponendo $h = -a_2/3$ l'equazione data viene scritta nella forma ridotta

$$y^3 + p\,y + q = 0, \ \text{dove}\ p = (3a_1 - a_2^2)/3\,,\ q = (27a_0 - 9a_1a_2 + 2a_2^3)/27\,. \tag{2.2}$$

Dell'equazione (2.2) si cerca una soluzione della forma $y = u - v$, cioè

$$(u-v)^3 + p\,(u-v) + q = u^3 - v^3 + (p - 3uv)(u-v) + q = 0.$$

Si impone che $u^3 - v^3 = -q$ e che $uv = p/3$, per cui u^3 e $-v^3$ risultano essere le due soluzioni dell'equazione di secondo grado $z^2 + q\,z - p^3/27 = 0$, e si ha

$$u^3 = -q/2 + \sqrt{\Delta}, \qquad -v^3 = -q/2 - \sqrt{\Delta}, \quad \text{dove} \quad \Delta = p^3/27 + q^2/4.$$

Se $\Delta \geq 0$, u^3 e $-v^3$ sono reali e si calcolano $u = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} - q/2}$ e $v = \sqrt[3]{\sqrt{\Delta} + q/2}$. Se $\Delta < 0$, u^3 e $-v^3$ sono complessi coniugati ed è sempre possibile scegliere per le due radici cubiche le determinazioni tali che $u - v$ risulti reale. Calcolata la prima soluzione $u - v$ dell'equazione (2.2), si divide il primo membro della (2.2) per $y-(u-v)$, ottenendo l'equazione di secondo grado $y^2+(u-v)y+3uv+(u-v)^2 = 0$, le cui soluzioni sono $-\ (u-v)/2\ \pm\ i\sqrt{3}\,(u+v)/2$. Abbiamo così ottenuto le tre soluzioni dell'equazione (2.1)

$$\begin{aligned}
x_1 &= u - v - \frac{a_2}{3}\,, \\
x_2 &= -\ \frac{u-v}{2}\ -\frac{a_2}{3} + \frac{1}{2}\, i\sqrt{3}\,(u+v), \\
x_3 &= -\ \frac{u-v}{2}\ -\frac{a_2}{3} - \frac{1}{2}\, i\sqrt{3}\,(u+v).
\end{aligned}$$

La soluzione x_1 è reale. Se $\Delta < 0$, allora $u + v$ è un numero immaginario puro, e quindi anche x_2 e x_3 sono reali. Naturalmente Cardano, non conoscendo i numeri complessi, si fermava alla prima soluzione.

Per la formula risolutiva dell'equazione di quarto grado, sia

$$p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

e sia α una soluzione reale dell'equazione di terzo grado

$$y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_0)y + (4a_0a_2 - a_1^2 - a_0a_3^2) = 0.$$

Si pone $\beta^2 = 4\alpha - 4a_2 + a_3^2$ e $\gamma^2 = \alpha^2 - 4a_0$, scegliendo per β e γ due determinazioni tali che $\beta\gamma = a_3\alpha - 2a_1$. Allora

$$p(x) = (x^2 + a_3x/2 + \alpha/4)^2 -\ (\beta x + \gamma)^2/4.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di quarto grado sono le soluzioni delle equazioni di secondo grado

$$2x^2 + (a_3 \pm \beta) +\ (\alpha \pm \gamma) = 0.$$

2.6.2 La formula di Tartaglia

La formula che Tartaglia comunicò a Cardano per il caso $x^3 + px = q$ era espressa sotto forma di poesia (a lato le espressioni da calcolare nella notazione attuale)

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Quando che'l cubo con le cose appresso}\\ \textit{Se agguaglia a qualche numero discreto}\end{array}\right\} \quad x^3+px=q$$

$$\begin{array}{l}\textit{Trovami dui altri differenti in esso}\end{array} \qquad s-t=q$$

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Dapoi terrai questo per consueto}\\ \textit{Che'l lor produtto sempre sia eguale}\\ \textit{Al terzo cubo delle cose netto}\end{array}\right\} \quad st=(p/3)^3$$

$$\left.\begin{array}{l}\textit{El residuo poi suo generale}\\ \textit{Delli lor lati cubi ben sottratti}\\ \textit{Varrà la tua cosa principale}\end{array}\right\} \quad \sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{t}=x$$

Confrontando con la formula risolutiva riportata sopra, si vede che la soluzione che si ottiene seguendo la poesia è corretta, infatti $s=u^3$ e $t=v^3$.

Seguiamo questo procedimento per risolvere l'equazione "sia un cubo e 6 volte il suo lato uguale a 20", che in linguaggio simbolico si traduce in $x^3+6x=20$. Dobbiamo determinare s e t tali che $s-t=20$ e $st=8$. Quindi $s=\sqrt{108}+10$ e $t=\sqrt{108}-10$ e si ricava $x=\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{t}=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. L'ulteriore riduzione di questa espressione per mezzo del completamento del cubo era alla portata degli algebristi dell'epoca (Cardano aveva già pubblicato nel 1539 un trattato che comprendeva fra le altre cose la razionalizzazione dei denominatori contenenti radici cubiche)

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}=\sqrt[3]{\frac{108\sqrt{108}+108\sqrt{108}+2160}{216}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{108}+6)^3}{6^3}}=\frac{\sqrt{108}+6}{6}$$

e analogamente $\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=(\sqrt{108}-6)/6$, da cui si ricava $x=2$.

In questo caso non abbiamo avuto difficoltà a trovare la soluzione perché $\Delta>0$. Però se $\Delta<0$, come può accadere nel caso dell'equazione "un cubo uguale a una cosa e a un numero", la regola conduce ad una situazione non trattabile se non facendo riferimento ai numeri complessi. Ad esempio, l'equazione $x^3=15x+4$ ha la soluzione $x=4$, ma con la formula si ottiene $x=\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$. Cardano, partendo dal presupposto che un numero negativo non potesse avere radice quadrata, non riusciva a conciliare questo risultato con la soluzione $x=4$, e concludeva che il suo risultato era "tanto sottile quanto inutile".

2.7 La comparsa dei numeri complessi

A questo punto la storia della risoluzione delle equazioni si intreccia con quella dei numeri complessi. Al tempo di Cardano i numeri irrazionali venivano ormai ammessi, ma i numeri negativi sollevavano grosse difficoltà. Fin quando si erano studiate solo equazioni di secondo grado, gli algebristi avevano potuto evitare i numeri immaginari semplicemente dicendo che certe equazioni non avevano soluzione. Con l'introduzione delle equazioni di terzo grado, però, la situazione cambiò: ogniqualvolta le tre radici dell'equazione erano reali e diverse da zero, la formula di risoluzione portava a radici quadrate di numeri negativi. È in questo ambito che entra in scena un altro algebrista italiano, Raffaele Bombelli (1526-1572).

Nella sua opera, *Algebra*, stampata nel 1572, osservava che i due radicandi delle radici cubiche risultanti dalla solita formula differivano solo per un segno. Nell'esempio visto sopra la soluzione porta ai due radicandi $\sqrt{-121}+2$ e $\sqrt{-121}-2$, mentre l'equazione ammette la radice positiva $x = 4$, come si può verificare per sostituzione diretta. Bombelli ebbe l'idea che le loro radici cubiche potessero essere messe in relazione tra loro nello stesso modo in cui erano correlati tra loro i radicandi. La sua osservazione ebbe il merito di portare alla luce il concetto di numero complesso. Fra le molte notazioni introdotte dal Bombelli, infatti, vi è la definizione e l'uso dei simboli *più di meno* per $+i$ e *meno di meno* per $-i$. Bombelli stabilì le leggi formali del calcolo con i nuovi numeri, che chiamava *quantità silvestri*, e che gli consentivano di applicare le formule di Cardano anche quando le soluzioni erano tutte reali.

Inizialmente i numeri complessi vennero considerati solo come artifici algebrici utili a risolvere le equazioni. Erano infatti visti come numeri che non dovrebbero esistere e non se ne conosceva ancora la natura. Cartesio nel 17° secolo li chiamò *numeri immaginari*, ma per la rappresentazione grafica dei numeri complessi come punti del piano si dovette aspettare il norvegese Wessel nel 1799. Questa rappresentazione è oggi indicata con i nomi di Argand, che la propose nel 1803, e di Gauss che però la utilizzò solo trenta anni dopo.

La conseguenza più importante di questo periodo dedicato alla scoperta delle soluzioni delle equazioni di terzo e quarto grado fu il potente stimolo che diede alle ricerche algebriche in diverse direzioni. Si tentò di trovare una soluzione per le equazioni di quinto grado. Come oggi sappiamo, il problema è insolubile, ma tutti i tentativi fatti per trovare la formula risolutiva dell'equazione di quinto grado, e poi per dimostrare che una tale formula non esiste per il caso generale, furono molto produttivi per il successivo sviluppo della matematica.

Bibliografia

An overview of Babilonian mathematics
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Babylonian_mathematics.html

Pythagoras's theorem in Babilonian mathematics
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html

Equazione di terzo grado http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_terzo_grado

S. Maracchia, Storia delle equazioni e dei sistemi di primo grado
http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/
2549_2007_aggiornamento_maracchia_3.pdf

Storia delle equazioni http://www.dti.unimi.it/citrini/MD/equazioni/arabi.htm

Capitolo 3

I grandi teoremi

Alla metà del 16° secolo il mondo matematico era pronto per un grande balzo in avanti. Mancavano due cose sole: uno strumento più agile per fare i conti aritmetici e la creazione di una notazione veramente simbolica che consentisse di svincolarsi dalla trattazione dei casi particolari. Il primo problema venne risolto con la diffusione della notazione decimale per i numeri frazionari in sostituzione delle frazioni sessagesimali, ad opera di Viète (francese) e di Stevino (fiammingo), e con l'invenzione dei logaritmi da parte di Nepero (scozzese) e di Briggs (inglese), accolti con entusiasmo dagli astronomi che, come Keplero (tedesco), avevano a che fare con grandi quantità di dati. L'interazione di matematici di tante parti dell'Europa mostrava che la matematica rappresentava un elemento unificatore, al di là delle divisioni religiose e politiche.

Anche il secondo problema venne risolto per passi successivi, con il contributo graduale di molti matematici. Fu introdotto l'uso delle lettere per indicare i dati supposti noti, le variabili e i parametri, i simboli per le operazioni aritmetiche, il segno $=$ e i segni di $<$ e $>$, evitando in gran parte le espressioni verbali e le abbreviazioni. Solo la notazione degli esponenti per le potenze richiese più tempo.

Viète (1540-1603) fu la figura centrale di questo periodo. Fu lui il primo a introdurre una notazione in cui un simbolo poteva rappresentare un numero e poteva essere manipolato come i numeri, e a distinguere i simboli che rappresentavano variabili da quelli che rappresentavano coefficienti. Viète però non considerava queste idee come sue scoperte, anzi credeva di avere solo riscoperto qualcosa che già gli antichi dovevano avere usato, perché gli sembrava impossibile che i greci avessero raggiunto risultati così avanzati in geometria senza fare uso di un qualche simbolismo, che però avevano accuratamente cancellato nella loro versione finale.

La convenzione di indicare con le prime lettere dell'alfabeto le quantità note e con le ultime lettere dell'alfabeto le incognite si deve a Cartesio. Anche noi, al giorno d'oggi usiamo spesso questa convenzione, ad esempio quando scriviamo un'equazione nella forma $ax^2 + bx + c = 0$.

La scoperta della formula risolutiva per le equazioni di terzo e quarto grado aveva aperto la strada alla ricerca di formule risolutive per le equazioni di grado superiore.

Viète ad esempio credeva che una volta che il problema del calcolo delle soluzioni di un'equazione di qualunque grado fosse stato formalizzato, sarebbe stato possibile risolverlo. Ad avvalorare questa idea c'era il fatto che egli era stato capace di risolvere un'equazione di 45° grado proposta da van Roomen. Viète, una volta formalizzata l'equazione, aveva riconosciuto che si trattava di un'identità trigonometrica.

3.1 Il teorema fondamentale dell'algebra

L'applicazione da parte di Viète della trigonometria per risolvere le equazioni di terzo grado anche nel caso delle radici tutte reali aveva messo in luce la stretta correlazione fra grado dell'equazione e numero delle soluzioni per le equazioni fino al quarto grado.

Un importante tassello alla teoria delle equazioni fu la scoperta di Girard (1595-1632) delle *funzioni simmetriche elementari* delle radici. Nel suo libro *L'invention nouvelle en l'Algèbre* Girard aveva dimostrato che se si suppone che un'equazione di grado n della forma

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

abbia n soluzioni x_1, …, x_n, le somme dei prodotti r a r delle soluzioni con $r \leq n$ sono uguali a $(-1)^r\, a_{n-r}$.

Queste relazioni avevano avvalorato l'idea che un'equazione di grado n dovesse effettivamente avere n soluzioni. Non era però chiaro quale forma dovessero avere le soluzioni, potevano magari appartenere anche a campi più vasti di quello complesso.

Nel 1746 d'Alembert, assumendo l'ipotesi che vi fossero n soluzioni per l'equazione di grado n, cercò di dimostrare che le soluzioni dovessero appartenere al campo complesso, ma la sua dimostrazione era incompleta. Nel suo lavoro *Recherches sur les racines imaginaires des équations* del 1749 Eulero affrontò il caso delle equazioni di grado $n \leq 6$ e presentò una bozza di dimostrazione ricorsiva per il caso generale che si basava sulla fattorizzazione di un polinomio monico di grado $2m = 2^n$ nel prodotto di due polinomi monici di grado m. Si assumeva che

$$x^{2m} + Ax^{2m-2} + Bx^{2m-3} + \ldots = (x^m + g\,x^{m-1} + \ldots)(x^m + h\,x^{m-1} + \ldots),$$

si moltiplicavano i due fattori e si confrontavano i coefficienti ottenendo delle espressioni razionali per g, h, …, in termini di A, B, …. Il calcolo era portato a termine per $n = 4$ e solo indicato per $n > 4$. Purtroppo le espressioni proposte da Eulero potevano portare a $0/0$, come notò Lagrange nel 1772. Lagrange sfruttò le sue conoscenze sulle permutazioni delle radici per riempire le lacune della dimostrazione di Eulero, ma sempre supponendo che un'equazione di grado n avesse comunque n radici di un qualche tipo.

Laplace, nel 1795, seguì un strada completamente diversa, usando il discriminante del polinomio. La sua dimostrazione era molto elegante, ma anche lui dovette assumere l'esistenza delle radici.

Rimaneva quindi il problema di fondo di dimostrare il cosiddetto *teorema fondamentale dell'algebra* che afferma che ogni equazione di grado n a coefficienti complessi possiede n radici.

La prima dimostrazione rigorosa del teorema per il caso di un polinomio di grado n a coefficienti reali è dovuta a Gauss. Nella sua tesi di dottorato del 1799, Gauss (che aveva allora 21 anni) dimostrò che i precedenti tentativi di dimostrazione, compresi quelli di Eulero e di Lagrange, non erano esenti da errori. La dimostrazione di Gauss era basata in parte su considerazioni geometriche (per una versione semplificata della dimostrazione geometrica si veda il libro di Boyer). Nel 1806 Argand pubblicò una dimostrazione del teorema per il caso generale dei coefficienti complessi basata su considerazioni analitiche. La dimostrazione di Argand fu poi ripresa nel 1821 da Cauchy nel suo *Cours d'analyse de l'Ècole Royale Polytechnique*, senza citarne l'autore. Nel 1816, Gauss pubblicò due nuove dimostrazioni, e un'altra ancora nel 1850.

Successivamente sono state proposte molte dimostrazioni diverse. Nella maggior parte dei casi vengono sfruttati concetti di continuità delle funzioni reali o complesse. Questo ha portato ad affermare che il cosiddetto teorema fondamentale dell'algebra non sia poi così fondamentale e neppure che sia un teorema di algebra. Nel 1891 Weierstrss ne dette una dimostrazione costruttiva, poi ripresa e semplificata da Kneser nel 1981, mostrando come il problema sia ancora sentito attuale.

Una dimostrazione semplice

Quella che segue è una dimostrazione analitica del teorema come viene normalmente proposta nei corsi a livello elementare. Le dimostrazioni che sfruttano proprietà delle funzioni di variabile complessa sono molto più compatte. Per questa dimostrazione occorre premettere il seguente

Lemma. Dato il polinomio a coefficienti complessi

$$p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0,$$

ed un numero complesso z tale che $p(z) \neq 0$, esiste sempre uno ζ per cui

$$|p(z+\zeta)| < |p(z)|.$$

Dim.: Sia K un intorno circolare di z di raggio r e sia $\zeta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $\rho \leq r$. Sostituendo si ha

$$p(z+\zeta) = (z+\zeta)^n + c_{n-1}(z+\zeta)^{n-1} + \ldots + c_0 = p(z) + q(\zeta),$$

dove $q(\zeta)$ è un polinomio di grado n. Indicando con $c\,\zeta^\nu$ il termine di grado minimo in $q(\zeta)$, si ha

$$p(z+\zeta) = p(z) + c\,\zeta^\nu + c'\,\zeta^{\nu'} + \ldots,$$

in cui $\nu < \nu'$. Poiché per ipotesi è $p(z) \neq 0$, si può scrivere

$$\frac{p(z+\zeta)}{p(z)} = 1 + s\,\zeta^\nu(1 + \zeta\,t),$$

dove $s = c/p(z)$ e t è un polinomio in z e ζ. Posto $s = h(cos\lambda + i\sin\lambda)$, si ha

$$s\,\zeta^\nu = h(cos\lambda + i\sin\lambda)\rho^\nu(\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)) = h\rho^\nu(\cos(\lambda+\nu\theta) + i\sin(\lambda+\nu\theta)).$$

Limitandosi agli ζ di K per cui $\lambda + \nu\theta = \pi$, cioè ai punti che stanno sul segmento uscente da z che forma un angolo $\theta = (\pi - \lambda)/\nu$ con l'asse reale, si ha

$$\cos(\lambda+\nu\theta) + i\sin(\lambda+\nu\theta)) = -1, \quad \text{per cui} \quad s\,\zeta^\nu(1+\zeta\,t) = -h\rho^\nu(1+\zeta\,t).$$

Poiché $|\zeta| = \rho \leq r$, se scegliamo r arbitrariamente piccolo, il secondo fattore $1+\zeta\,t$ diventa arbitrariamente vicino a 1, e quindi $s\,\zeta^\nu(1+\zeta\,t)$ è arbitrariamente vicino a $-h\rho^\nu$ e $p(z+\zeta)/p(z)$ è arbitrariamente vicino a $1 - h\rho^\nu$. Quindi $|p(z+\zeta)| < |p(z)|$. □

Poiché

$$|p(x)| = |x^n|\,|1 + \frac{c_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{c_0}{x^n},$$

è

$$\lim_{x\to\infty} |p(x)| = +\infty.$$

Fissato un intero positivo N, è quindi possibile determinare un intorno circolare chiuso K dell'origine tale che $|p(x)| > N$ per tutti gli $x \in K$. In K la funzione $|p(x)|$ ha minimo e sia

$$\mu = |p(\alpha)| = \min_{x\in K} |p(x)|.$$

Deve necessariamente essere $\mu = 0$ perché se non lo fosse, per il lemma precedente esisterebbe uno $\zeta \in K$ tale che $|p(\alpha+\zeta)| < |p(\alpha)|$ e quindi α non sarebbe un punto di minimo. Ne segue che $p(\alpha) = 0$.

Abbiamo così dimostrato che un'equazione di grado n a coefficienti complessi ha sempre almeno una radice nel campo complesso. Per dimostrare poi che un'equazione $p(x) = 0$ di grado n ha esattamente n radici (contate con la loro molteplicità), si indica con z_1 la soluzione trovata e si divide $p(x)$ per $x - z_1$. Poiché $p(z_1) = 0$ si ha

$$p(x) = (x - z_1)q(x),$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado $n-1$ e primo coefficiente 1. Si ripete il ragionamento su $q(x)$ e così via, fino ad ottenere una espressione della forma

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n), \tag{3.1}$$

in cui gli n numeri complessi z_i per $i = 1, \ldots, n$, sono soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$. Una soluzione z_i che comparisse in più fattori della (3.1) dovrebbe essere contata per tante volte quante compare, cioè quant'è la sua molteplicità.

3.2 La irrisolubilità per radicali dell'equazione di quinto grado

Per la risoluzione dell'equazione di quinto grado all'inizio si cercarono metodi simili a quelli che avevano funzionato per le equazioni fino al quarto grado. Poiché l'equazione di terzo grado era stata risolta tramite una risolvente di secondo grado e l'equazione di quarto grado tramite una risolvente di terzo grado, per lungo tempo si cercò di trovare una risolvente di quarto grado per l'equazione di quinto grado. Cartesio ad esempio lo lasciava al lettore come esercizio.

Oggi sappiamo che questa ricerca non avrebbe prodotto formule risolutive valide in generale perché vi sono equazioni di grado superiore al quarto a coefficienti razionali che sono irrisolubili per radicali. Magari potremmo pensare che queste equazioni siano l'eccezione e non la regola e invece è proprio l'opposto. Infatti van der Waerden (1903-1996) ha dimostrato che "asintoticamente" il 100% delle equazioni di qualsiasi grado maggiore di 4 non è risolubile per radicali.

Si potrebbe obiettare che dal punto di vista pratico possedere soluzioni analitiche esatte delle equazioni non è necessario, dato che esistono ottimi metodi numerici, particolarmente adatti all'uso su calcolatore, che consentono di approssimare le soluzioni con la precisione voluta. Ma come già accaduto in altri casi (ad esempio con la quadratura del cerchio), gli sforzi per risolvere un problema hanno dato frutti che vanno ben al di là della soluzione cercata.

Quindi riprendiamo la nostra storia. Nel 1683 Tschirnhaus propose una trasformazione che consentiva la eliminazione del termine di terzo grado. La trasformazione $y = x+a_4/5$ già consentiva di eliminare il termine di quarto grado, per cui l'equazione

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

si semplificava nella forma

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0.$$

Tschirnhaus propose di applicare una trasformazione di variabile della forma $y = x^2 + px + q$, con p e q tali da annullare anche il termine in x^3 e dette il procedimento per determinare i due parametri. Di q si può dare subito l'espressione esplicita, mentre per trovare p si deve risolvere un'equazione di secondo grado. Tschirnhaus pensava che continuando in modo analogo sarebbe stato possibile trovare una trasformazione di variabile di quarto grado che eliminasse anche i due termini successivi riducendo l'equazione data nella forma semplice

$$y^5 + b_1y + b_0 = 0. \tag{3.2}$$

Tschirnhaus non riuscì a portare a compimento i suoi conti, ma nel 1786 lo svedese Bring trovò che era possibile costruire i coefficienti della trasformazione di variabile di quarto grado risolvendo due equazioni ausiliarie, una di terzo grado e una di quarto. La sua scoperta però non fu recepita dal mondo matematico per quasi un secolo, fino a quando fu riscoperta nel 1864 da Jerrard con dei conti complicatissimi. L'equazione (3.2) è detta nella forma Bring-Jerrand. In pratica, i risultati di Tschirnhaus e Bring mostrano che possedere la formula risolutiva per l'equazione di quinto grado in cui manchino i termini di secondo, terzo e quarto grado sarebbe sufficiente per dire che l'equazione di quinto grado è risolubile.

Vista la difficoltà incontrata nella ricerca di una formula risolutiva per radicali dell'equazione di quinto grado, cioè che esprimesse le soluzioni per mezzo di operazioni razionali ed estrazioni di radice di vario indice, si cominciò a pensare che forse una tale formula non esisteva. Anche se un grande matematico come Lagrange era ancora ottimista sulla possibilità di trovarlo, già Gauss, che pure aveva dimostrato che ogni equazione algebrica di grado n ammette n soluzioni, lo era meno.

Eulero (1707-1783) aveva cercato di estendere all'equazione di quinto grado le tecniche che avevano portato alla formula risolutiva delle equazioni fino al quarto grado. Ne aveva ricavato una grande quantità di formule che però non gli avevano consentito di trovare quello che cercava. Ciononostante manteneva un certo ottimismo che un qualche processo di semplificazione avrebbe potuto portare alla formula risolutiva. Nel frattempo aveva ridotto il suo obiettivo a quello di individuare classi di equazioni di quinto grado per le quali fosse possibile scrivere una formula risolutiva della forma

$$\alpha = A_1\sqrt[5]{A} + A_2\sqrt[5]{A^2} + A_3\sqrt[5]{A^3} + A_4\sqrt[5]{A^4}.$$

Per le altre soluzioni si doveva sostituire la $\sqrt[5]{A^2}$ con $\rho^i\sqrt[5]{A}$, dove ρ^i era una delle radici dell'unità. Questa sostituzione ha lo stesso effetto che permutare le radici. Con queste posizioni Eulero aveva potuto dimostrare che esisteva una classe abbastanza ampia di equazioni di quinto grado che venivano risolte per radicali.

La ricerca di formule risolutive per le equazioni di quinto grado o superiore era così diventato il problema cruciale dell'algebra nella seconda metà del settecento. Nel 1770 Waring, Vandermonde e Lagrange, all'insaputa l'uno dell'altro, pubblicarono i loro risultati. Delle tre memorie quella che influenzò maggiormente le ricerche successive fu quella di Lagrange. Analizziamole singolarmente.

Waring (1736-1798) nelle *Meditationes Algebricae* metteva in relazione le funzioni simmetriche delle radici di un'equazione con le permutazioni delle radici stesse e dimostrava come in generale la soluzione di un'equazione di grado n venisse a dipendere dalla soluzione di un'equazione ausiliaria, detta risolvente, di grado $n!$, maggiore dunque del grado dell'equazione data. Concludeva, quindi, che era inutile cercare di risolvere mediante tale metodo le equazioni algebriche.

Vandermonde (1735-1796) nella *Mémoire sur la résolution des équations* cercò di esprimere le radici di un'equazione mediante le radici n-esime dell'unità, risolvendo come esempio l'equazione $x^n - 1 = 0$ nel caso $n = 11$. Sulla base di considerazioni sulle permutazioni delle radici, egli riusciva a trattare senza difficoltà i casi delle equazioni di terzo e quarto grado, ma concludeva che era inutile cercare funzioni di cinque elementi che assumessero 3 o 4 valori per permutazioni degli elementi stessi, ciò che lo portava a concludere che non ne esistessero. Un fatto che fu poi dimostrato da Ruffini e Abel.

Lagrange (1736-1813) nelle *Reflexions sur la résolution algébrique des équations* esaminò i metodi trovati fino a quel momento per la risoluzione delle equazioni, allo scopo di individuare dei principi generali e far vedere a priori perché tali metodi funzionassero per il terzo e quarto grado ma non per i gradi successivi. Questa analisi portò Lagrange a concludere che i metodi risolutivi si basano sulla ricerca di opportune equazioni risolventi, le cui radici sono espressioni razionali delle radici dell'equazione data. Nel caso del terzo e quarto grado, il grado della risolvente si poteva ricondurre ad un grado minore di 3 e 4 rispettivamente, mentre nel caso generale Lagrange dimostrò che il grado della risolvente è $n!$ o un sottomultiplo di $n!$. Questo risultato, noto come "teorema di Lagrange", in termini moderni si esprime dicendo che in un gruppo finito l'ordine di ogni sottogruppo divide l'ordine del gruppo. Quindi una qualunque funzione razionale $g(x_1, \ldots, x_n)$ delle radici $x_1, \ldots, x_n$ dell'equazione data poteva assumere fino a $n!$ valori distinti $g_1, \ldots, g_{n!}$. Lagrange proponeva $\prod_{i=1,\ldots,n!}(y - g_i)$ come equazione risolvente. Per il quinto grado la risolvente risultava di sesto grado. Il merito di Lagrange è stato quello di sottolineare l'importanza di studiare le proprietà delle espressioni $g(x_1, \ldots, x_n)$ in relazione alle permutazioni delle radici $x_1, \ldots, x_n$. Lagrange comunque era ancora ottimista sulla possibilità di trovare un qualche procedimento finito di calcolo che applicato ai coefficienti consentisse di trovare le soluzioni.

La risposta negativa alla questione venne da Ruffini e da Abel. Nel 1799 Ruffini pubblicò una corposa memoria di 500 pagine dal titolo *Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle soluzioni generali di grado superiore al quarto*, e successivamente nel 1826 Abel pubblicò sul giornale di Crelle una *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébraique des équations génerales qui dépassent le quatrième degré.* Non sembra che Abel avesse una conoscenza diretta delle dimostrazioni di Ruffini, ma aveva invece letto un lavoro di Cauchy che era basato sul risultato di Ruffini, quindi si può pensare che Abel sia stato indirettamente influenzato da Ruffini. Ma è al francese Galois che si deve il risultato più generale: un'equazione è risolubile per radicali se e solo se il gruppo di Galois ad essa associato è risolubile. Per la sua tragica fine avvenuta nel 1832, Galois non vide mai pubblicati i suoi risultati, in cui si riconoscono oggi le basi della teoria dei gruppi, gruppi simmetrici e loro sottogruppi normali. Negli anni tra il 1844 ed il 1846 Cauchy pubblicava ben 13 lavori sui gruppi di sostituzione, in nessuno dei quali si fa riferimento a Galois, di cui Cauchy doveva conoscere i lavori.

Dieci anni dopo la morte di Galois, Liouville tenne dei seminari sulla teoria di Galois, che furono seguiti da alcuni giovani matematici parigini fra cui Hermite (1822-1901), Bertrand (1822-1900) e Serret (1819-1885). Serret pubblicò nel 1849 un suo *Cours d'Algèbre Supérieure* dove menzionava in nota l'esistenza di una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità delle equazioni algebriche, ma la difficoltà della materia spinse Serret a non trattare l'argomento. La teoria di Galois intanto oltrepassava i confini parigini: a Gottinga, Dedekind (1831-1916) ne faceva oggetto delle sue lezioni mentre a Pisa, Betti (1823-1892) pubblicava nel 1851 un primo articolo di commento. L'anno seguente Betti dava alla stampa una memoria *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, in cui affrontava il problema della risolubilità delle equazioni stabilendo prima la teoria dei gruppi di sostituzioni e poi ordinando e dimostrando i teoremi enunciati da Galois. Proseguendo su queste ricerche Betti fu portato ad affrontare il problema della risoluzione analitica delle equazioni di grado superiore. In una memoria del 1854 dimostrava il teorema da cui dipende questa risoluzione, affermando di aver trovato mediante funzioni ellittiche ed iperellittiche la soluzione analitica di qualsiasi equazione. Betti era troppo ottimista, e già nel caso del quinto grado si doveva arrendere per i troppi calcoli. L'impresa riuscì Hermite nel 1858, per l'equazione $x^5 - x - a = 0$, di cui espresse le radici con funzioni trascendenti ellittiche. Contemporaneamente giungeva allo stesso risultato Kronecker (1823-1891) mentre Brioschi (1824-1897) aveva successo con l'equazione di sesto grado. Finalmente nel 1870 i risultati sulla teoria delle equazioni vennero raccolti da Jordan (1838-1922) nel suo *Traité des substitutions et des équations algébriques*. L'ultimo libro del trattato comprendeva i risultati delle sue ricerche sui gruppi.

Vediamo allora chi sono i tre protagonisti di questa parte della nostra storia.

Ruffini

Paolo Ruffini (1765-1822) fu professore di matematica e medicina all'Università di Modena, di cui per lungo periodo fu anche rettore. Al contrario di Abel che passò la sua breve vita di matematico viaggiando per l'Europa, Ruffini non si mosse quasi mai da Modena, dove oltre ai suoi impegni accademici esercitò la professione di medico, rinunciando perfino ad un posto di professore in una università prestigiosa come quella di Padova per non allontanarsi dai suoi pazienti. Nel 1817 si ammalò di tifo durante un'epidemia e quasi ne morì. Si riprese solo parzialmente e dovette abbandonare la sua professione accademica. Il suo nome è legato al teorema della irresolubilità dell'equazione di quinto grado e alla cosiddetta "regola di Ruffini", per la divisione fra un polinomio e un binomio di primo grado.

Prendendo spunto dal lavoro di Lagrange sulle permutazioni delle radici dei polinomi, nel 1799 Ruffini pubblicò una corposa memoria di 500 pagine in cui veniva dimostrato che non è possibile risolvere per radicali le equazioni di grado superiore al quarto. Ruffini dichiarava apertamente di ispirarsi a Lagrange ed indagando le proprietà del gruppo di sostituzioni su n argomenti individuava concetti come la primitività e la transitività, che applicati al caso di 5 elementi lo portarono a concludere che non esiste una funzione di cinque elementi che assume, per ogni loro permutazione possibile, solo 8, 4 o 3 valori distinti. In termini moderni: il gruppo totale delle sostituzioni su 5 argomenti non possiede sottogruppi di indice 8, 4 o 3. Ruffini per dimostrare questo teorema fu costretto ad elencare tutte le 120 permutazioni e ad analizzarle. Questo era il teorema essenziale, grazie al quale Ruffini dimostrava l'impossibilità della risoluzione per radicali delle equazioni di grado superiore al quarto. L'importanza e la novità del teorema suscitò la diffidenza e lo scetticismo dei contemporanei. Egli ne mandò una copia a Lagrange ma non ottenne alcuna risposta, gliene spedì anche una seconda copia, ma non ebbe esito migliore. Negativamente si espresse anche Malfatti (1731-1807), che nel 1771 aveva ottenuto una risolvente di sesto grado per l'equazione di quinto grado e aveva mostrato che se questa risolvente aveva una radice razionale, allora l'equazione era risolubile per radicali.

Una copia delle successive riedizioni fu consegnata ad una commissione presieduta da Lagrange che si limitò a far sapere indirettamente a Ruffini che c'erano troppe imprecisioni nelle dimostrazioni per essere sicuri dell'esattezza dei risultati.

Finalmente Cauchy, a cui Ruffini inviò il suo trattato, scrisse che le argomentazioni di Ruffini provavano completamente la irrisolubilità dell'equazione di quinto grado. Cauchy stesso generalizzò nel 1813-1814 i risultati sulle permutazioni. Lagrange invece non era convinto che la dimostrazione di Ruffini fosse corretta.

In realtà la dimostrazione di Ruffini conteneva una grossa lacuna, perché egli presupponeva che se una formula risolutiva esisteva, questa doveva essere una funzione razionale di radicali. Anche a causa della sua mole la memoria fu poco considerata. La dimostrazione fu bersagliata da critiche, a cui Ruffini rispose con nuove versioni semplificate fino alla versione finale del 1813 (in tutto sei versioni). Anche in questa versione però la lacuna non viene colmata e lo sarà solo da Abel, che dimostrerà il seguente lemma: Se un'equazione è risolubile algebricamente, è sempre possibile dare alla radice una forma tale che tutte le funzioni algebriche di cui essa è composta si possono esprimere tramite funzioni razionali delle radici dell'equazione proposta.

Il fatto che non si possano risolvere equazioni generali per radicali non impedisce però che esse siano risolubili se si sostituiscono i radicali con altre funzioni elementari. Ad esempio nel 1854 Enrico Betti dimostrò che le equazioni di quinto grado si possono risolvere con funzioni ellittiche a parametro logaritmico. Al crescere del grado le funzioni che si devono utilizzare diventano sempre più complicate.

Abel

Niels Henrik Abel (1802-1829), norvegese, è noto soprattutto per i suoi fondamentali contributi all'algebra ed alla teoria delle funzioni.

La vita di Abel fu segnata dalla povertà anche dovuta alla crisi economica che aveva colpito la Norvegia all'inizio del 19° secolo a seguito della guerra che infuriò per una quindicina di anni fra la Gran Bretagna, la Danimarca (che all'epoca governava la Norvegia) e la Svezia (che si annesse la Norvegia nel 1814). La morte del padre scaricò sulle spalle di Abel, all'epoca diciottenne, gran parte del peso della famiglia (aveva sei fratelli).

Si interessò fin da giovane alla risoluzione dell'equazione di quinto grado. Quando faceva l'università credeva di avere trovato una formula risolutiva, ma i suoi professori gli fecero notare che non era generale. Così cambiò direzione e si mise a cercare una dimostrazione di irrisolubilità per radicali. Mentre studiava lingue per poter viaggiare e avvicinare i più influenti matematici del mondo completò la sua dimostrazione e nel 1824 la pubblicò a sue spese in un fascicoletto le cui copie voleva distribuire durante i suoi viaggi. Potè così avvicinare molte personalità, con alterni risultati. Ebbe calorosa accoglienza da parte di Crelle che lo convinse a pubblicare nel 1826 sul suo *Journal für Mathematik* una versione più completa della dimostrazione, e anche successivamente gli pubblicò molti articoli.

Invece Gauss e Cauchy non presero in considerazione i suoi risultati. Cauchy addirittura ne perse la copia che gli era stata data. Abel continuò a girare l'Europa alla ricerca di una qualche posizione accademica che gli desse sicurezza economica e gli consentisse di continuare i suoi studi, che nel frattempo si erano spostati all'area delle funzioni ellittiche. Purtroppo non trovò nulla. La sua vita di stenti lo aveva fatto ammalare di tubercolosi. Morì il 6 Aprile 1829 all'età di 29 anni. Due giorni dopo la sua morte arrivò una lettera di Crelle con la comunicazione del conferimento di una cattedra all'Università di Berlino.

La quantità di lavoro che Abel riuscì a completare in così pochi anni è straordinaria. Con la sua dimostrazione della irrisolubilità per radicali dell'equazione di quinto grado chiudeva un problema aperto da quasi tre secoli. Non sembra che Abel avesse una conoscenza diretta del lavoro di Ruffini, ma aveva letto un lavoro di Cauchy che era basato sui risultati di Ruffini, quindi si può anche pensare che Abel sia stato indirettamente influenzato da Ruffini.

La dimostrazione della irrisolubilità data da Abel include i seguenti punti: (1) una caratterizzazione della forma che dovrebbe avere una soluzione in funzione dei radicali, (2) una dimostrazione che ogni espressione di questa forma è una funzione razionale delle sue radici (questa parte era omessa nella dimostrazione di Ruffini), (3) una dimostrazione che se una funzione razionale di 5 argomenti assume meno di 5 valori quando i suoi argomenti sono permutati, allora assume al più 2 valori, (4) una dimostrazione del fatto che se si assume che la soluzione dell'equazione di quinto grado sia esprimibile in radicali porta all'assurdo che due funzioni razionali uguali delle 5 soluzioni assumono un diverso numero di valori quando si permutano le soluzioni.

Successivamente Abel studiò quali ipotesi potessero garantire la risolubilità e dimostrò che tutte le soluzioni delle equazioni risolubili sono funzioni razionali l'una dell'altra e che se $f(\alpha)$ e $g(\alpha)$ sono due funzioni razionali di una radice α, allora esse devono commutare. Questo risultato mette in relazione la risolubilità delle equazioni con la commutatività di funzioni razionali. Pochi anni dopo Galois, che però non era a conoscenza di quest'ultimo risultato di Abel, sviluppò la sua teoria sulle permutazioni delle soluzioni e sul loro effetto sul valore delle funzioni razionali di quelle soluzioni.

Galois

Pur essendo un genio precoce della matematica, Evariste Galois (1811-1832), a causa di un profitto scolastico mediocre, fallì per due volte gli esami di ammissione all'Ècole Polytechnique e dovette ripiegare sull'obiettivo più modesto della preparazione all'insegnamento all'École Normale. Nel frattempo però aveva già fatto delle scoperte sensazionali raccolte in varie memorie che sottoponeva con scarsa fortuna ai matematici più famosi. All'età di diciassette anni mandò a Cauchy una sua prima memoria perché la presentasse all'Académie, ma Cauchy la smarrì. Né miglior sorte ebbe una sua seconda memoria inviata a Fourier, all'epoca segretario dell'Académie. Una terza memoria, presentata per il tramite di Poisson, gli fu restituita con il giudizio di incomprensibile. Ormai disilluso, era anche perseguitato dalla giustizia per i suoi atteggiamenti rivoluzionari. Aveva appena vent'anni quando fu coinvolto in un duello combattuto, si disse, per l'onore di una donna. Questa la versione ufficiale, mentre un'altra versione addossò la responsabilità del duello alla polizia segreta che avrebbe usato la motivazione dell'onore come copertura di un omicidio politico. Galois, che presentiva la sua fine, passò tutta la notte precedente a riassumere la sua teoria. La mattina successiva morì per un colpo di pistola all'addome e fu sepolto in una fossa comune. I suoi maggiori risultati matematici furono sistematizzati e pubblicati più di dieci anni dopo da Liouville.

Vogliamo ora dare un'idea, molto approssimativa, della teoria di Galois.

(a) Per prima cosa, è opportuno partire dai gruppi di *permutazioni*. Per semplificare un po' le cose consideriamo il caso delle permutazioni di tre elementi, che chiameremo 1, 2, 3. Su questi 3 elementi si possono definire 6 permutazioni, ed esattamente

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La prima permutazione è l'identità, che non scambia gli elementi, le successive 3 sono quelle che lasciano un elemento fisso e scambiano gli altri 2, le ultime due sono le rotazioni di uno e due passi. Non sarebbe difficile scrivere ad esempio tutte le permutazioni di 4 elementi. Un semplice conto mostra che ce ne sono 24. In generale le permutazioni di n elementi sono $n!$.

L'insieme di tutte le permutazioni di n elementi si indica con S_n e si dimostra che è un gruppo rispetto all'operazione di composizione in cui la permutazione e rappresenta l'identità. Infatti la tabella di composizione per S_3 è

	e	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
e	e	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_1	q_1	e	q_4	q_5	q_2	q_3
q_2	q_2	q_5	e	q_4	q_3	q_1
q_3	q_3	q_4	q_5	e	q_1	q_2
q_4	q_4	q_3	q_1	q_2	q_5	e
q_5	q_5	q_2	q_3	q_1	e	q_4

e l'elemento inverso è

$$e^{-1} = e, \quad q_1^{-1} = q_1, \quad q_2^{-1} = q_2, \quad q_3^{-1} = q_3, \quad q_4^{-1} = q_5, \quad q_5^{-1} = q_4.$$

I sottogruppi di S_3 sono gli insiemi $\{e\}$ (il sottogruppo banale), $\{e, q_1\}$, $\{e, q_2\}$, $\{e, q_3\}$ e $\{e, q_4, q_5\}$, che hanno 1 oppure 2 oppure 3 elementi. L'insieme $\{e, q_1, q_2, q_3\}$ non è un sottogruppo, in accordo al teorema di Lagrange, che afferma che i sottogruppi di un gruppo finito di m elementi sono formati da un numero di elementi che è un divisore di m. Ad esempio, S_4 che ha 24 elementi, ha sottogruppi di 1, 2, 3, 4, 6, 8 e 12 elementi.

Fra le permutazioni di S_n sono importanti i cicli. Fissato un intero $k \leq n$, un *ciclo di ordine* k è una permutazione $\sigma \in S_n$ per cui esiste un sottoinsieme $C = \{a_1, \ldots, a_k\}$ di k interi distinti $\leq n$, tale che
(1) $\sigma(a) = a$ per ogni $a \notin C$,
(2) $\sigma(a_i) = a_{i+1}$, ..., $\sigma(a_k) = a_1$.
Ad esempio, in S_3 vi sono tre cicli di ordine 2, ed esattamente q_1, q_2 e q_3 e 2 cicli di ordine 3, ed esattamente q_4 e q_5.

Si possono dimostrare molte proprietà interessanti sui cicli dei gruppi e sottogruppi. In particolare, una proprietà che ci servirà dimostra che se H è un sottogruppo di S_5 che contiene uno scambio, ad esempo q_1, e un ciclo di ordine 5, allora H è tutto S_5.

(b) Si considera poi l'equazione

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{3.3}$$

a coefficienti a_i in un campo $\mathbf{K}$. Sappiamo che se $\mathbf{K}$ è l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi, l'equazione è *riducibile* in $\mathbf{K}$, cioè ha n radici in $\mathbf{K}$. Se però $\mathbf{K}$ è un sottocampo di $\mathbf{C}$, questo non è detto e l'equazione può essere *irriducibile* in $\mathbf{K}$, come può accadere per esempio se $\mathbf{K}$ è il campo $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali. Si suppone in ogni caso che $\mathbf{K}$ contenga $\mathbf{Q}$. Un discorso a parte merita l'unità immaginaria i. All'epoca di Galois, le radici primitive di 1 erano considerate alla stregua dei numeri razionali, per cui veniva considerato naturale avere a disposizione le radici di 1 che servivano.

Si costruisce una *catena di estensioni* di $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} \subset \mathbf{K}(\gamma_1) \subset \mathbf{K}(\gamma_1, \gamma_2) \subset \ldots \subset \mathbf{K}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m),$$

così definita: fissata una sequenza $p_1, \ldots, p_m$ di interi, si estrae una radice p_1-esima γ_1 di un elemento di $\mathbf{K}$ e si forma il campo $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\gamma_1)$ ottenuto aggiungendo a $\mathbf{K}$ tutte le funzioni razionali di γ_1; si estrare una radice p_2-esima γ_2 di un elemento di $\mathbf{K}_1$ e si forma il campo $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1(\gamma_2) = \mathbf{K}(\gamma_1, \gamma_2)$ ottenuto aggiungendo a $\mathbf{K}_1$ tutte le funzioni razionali di γ_2; e così via per m passi, fino ad ottenere $\mathbf{K}_m = \mathbf{K}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Si nota che sostituendo le radici ij-esime con radici i-esime di radici j-esime si può fare in modo che gli indici $p_1, \ldots, p_m$ siano numeri primi.

Risolvere l'equazione (3.3) per radicali significa costruire una catena di estensioni di $\mathbf{K}$ fino a un campo $\mathbf{K}_m$ che contenga tutte le soluzioni di (3.3). Per chiarire meglio questo concetto, consideriamo la formula risolutiva dell'equazione

$$x^3 + px + q = 0$$

di terzo grado a coefficienti reali, quindi $\mathbf{K}$ è generato da p e q (vedere la formula risolutiva nel paragrafo 2.6.1). $\mathbf{K}_1$ è il campo ottenuto aggiungendo a $\mathbf{K}$ la $\gamma_1 = \sqrt{p^3/27 + p^2/4}$ e $\mathbf{K}_2$ è il campo ottenuto aggiungendo a $\mathbf{K}_1$ la $\gamma_2 = \sqrt[3]{\gamma_1 - q/2}$. Se si suppone che $\mathbf{K}_1$ contenga anche i, la catena può terminare qui, perché le tre soluzioni dell'equazione stanno in $\mathbf{K}_2$ (infatti $\sqrt[3]{\gamma_1 + q/2} = -p/(3\gamma_2)$). Altrimenti va fatta un'ulteriore estensione ad un campo $\mathbf{K}_3$ aggiungendo i a $\mathbf{K}_2$.

Si può dimostrare che è possibile scegliere i γ_i in modo che ciascuno di essi sia una funzione razionale delle radici dell'equazione (questo è il punto su cui Ruffini sorvola, mentre Abel risolve).

(c) Si considerano poi le relazioni fra coefficienti e radici dell'equazione data. Abbiamo visto che vi sono delle relazioni precise fra le radici $x_1, \ldots, x_n$ e i coefficienti $a_0, \ldots, a_{n-1}$ della (3.3), le cosiddette funzioni simmetriche elementari

$$\sum \prod_{1 \le t_1 < \ldots < t_i \le n} x_{t_1} \ldots x_{t_i} = (-1)^i a_{n-i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Con queste n relazioni si possono esprimere i coefficienti date le radici, ma a noi interessa il processo inverso, cioè esprimere le radici dati i coefficienti. Le funzioni sopra definite sono dette simmetriche perché invarianti per permutazioni delle radici. Oltre a queste, vi sono altre funzioni polinomiali a coefficienti razionali e i che legano le radici, e che possono essere invarianti oppure no per permutazione delle radici.

Per chiarire questa situazione, consideriamo ad esempio, l'equazione

$$x^4 - 2 = 0,$$

a coefficienti in $\mathbf{K}$=$\mathbf{Q}$, le cui soluzioni

$$x_1 = \sqrt[4]{2}, \quad x_2 = -\sqrt[4]{2}, \quad x_3 = i\sqrt[4]{2}, \quad x_4 = -i\sqrt[4]{2}$$

non appartengono a $\mathbf{Q}$. Oltre alle relazioni elementari

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0, \quad x_1x_2x_3x_4 = 2,$$

ci sono altre relazioni, come ad esempio $x_1 + x_2 = 0$ e $x_3 + x_4 = 0$. La prima relazione è soddisfatta se si scambia x_1 con x_2, ma non se si scambia x_1 con x_3 o con x_4 lasciando ferma la x_2 o si scambia x_2 con x_3 o con x_4 lasciando ferma la x_1. Continuando così si vede che delle 24 permutazioni di S_4 solo 8 lasciano invariate tutte le relazioni ed esattamente

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad q_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si verifica che queste 8 permutazioni formano un sottogruppo di S_4. Questo fatto è vero in generale, cioè le permutazioni delle n soluzioni di un'equazione di grado n che lasciano invariate le relazioni polinomiali a coefficienti in $\mathbf{K}$ formano un sottogruppo G di S_n, che viene detto *gruppo di Galois* dell'equazione.

(d) Costruiamo adesso una estensione di $\mathbf{K}$, ponendo $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\sqrt{2})$. Delle 8 permutazioni elencate sopra, solo 4, ed esattamente e, q_2, q_4 e q_6 lasciano invariate le relazioni polinomiali a coefficienti in $\mathbf{K}_1$. Infatti, q_1 e q_7 non sono più accettabili perché l'espressione corretta $x_1^2 = \sqrt{2}$ si trasformerebbe nell'espressione $x_3^2 = \sqrt{2}$ che non è valida, mentre q_3 e q_5 non sono più accettabili perché l'espressione corretta $x_2^2 = \sqrt{2}$ si trasformerebbe nell'espressione $x_4^2 = \sqrt{2}$ che non è valida. Le 4 permutazioni rimaste e, q_2, q_4 e q_6 formano un gruppo, quindi un sottogruppo H di G.

Estendiamo ancora, ponendo $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1(\sqrt[4]{2})$. Si ottiene un sottogruppo costituito da e e q_4. Infatti le permutazioni q_2 e q_6 non sono più accettabili, come si vede considerando l'espressione $x_1 - x_2 = 2\sqrt[4]{2}$. Ponendo poi $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2(i)$, si ottiene il sottogruppo costituito solo da e. Infatti la permutazione q_4 non è più accettabile, come si vede considerando l'espressione $x_3 - x_4 = 2i\sqrt[4]{2}$.

Ampliando l'insieme dei coefficienti delle espressioni che si richiedono soddisfatte dalle permutazioni, si ottengono dei sottogruppi progressivamente più piccoli. All'inizio l'equazione $x^4 - 2 = 0$ è irriducibile in $\mathbf{K}$. Con il primo ampliamento l'equazione $x^4 - 2 = (x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$ diventa riducibile in $\mathbf{K}_1$ che contiene $\sqrt{2}$. Con il secondo ampliamento l'equazione $x^4 - 2 = (x^2 - \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt{2})$ diventa riducibile in $\mathbf{K}_2$ che contiene anche $\sqrt[4]{2}$. Con il terzo ampliamento l'equazione $x^4 - 2 = (x^2 - \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt[4]{2})(x^2 - i\sqrt[4]{2})(x^2 + i\sqrt[4]{2})$ diventa completamente riducibile in $\mathbf{K}_3$ che contiene anche i.

A seguito dell'ampliamento degli insiemi in cui si prendono i coefficienti delle espressioni che si richiedono soddisfatte dalle permutazioni, i sottogruppi delle permutazioni valide si riducono, fino a quella banale, quando i coefficienti disponibili permettono di scrivere tutte le soluzioni. Si può dimostrare che il rapporto fra il numero di elementi di due sottogruppi consecutivi è sempre un numero primo. In pratica, se le radici dell'equazione si possono scrivere mediante radicali, vi è una catena di sottogruppi uno contenuto nell'altro, che parte dal gruppo di Galois e arriva fino al sottogruppo banale. Se ciò accade si dice che il gruppo di Galois dell'equazione è un *gruppo risolubile.*

A questo punto ci sono tutti gli elementi per dare il *teorema di Galois*: un'equazione $f(x) = 0$ irriducibile su $\mathbf{Q}$ è risolubile per radicali se e solo se il suo gruppo di Galois è risolubile. Nel caso dell'equazione $x^4 - 2 = 0$, vista sopra si è trovato che il suo gruppo di Galois è risolubile, quindi l'equazione è risolubile per radicali (ovvio, è di quarto grado).

Il teorema di Galois è difficilmente utilizzabile in pratica a causa della difficoltà di costruire il gruppo di Galois di un'equazione, ma è importantissimo sul piano teorico. Grazie ad esso è possibile dimostrare che in generale l'equazione di quinto grado non è risolubile per radicali.

(e) Si sa che un'equazione a coefficienti reali, se ha una radice α non reale, ha anche la radice coniugata $\overline{\alpha}$. Una permutazione delle radici che scambiasse fra di loro α e $\overline{\alpha}$ e lasciasse inalterate tutte le altre radici non modificherebbe le relazioni polinomiali fra coefficienti e radici e quindi dovrebbe appartenere al gruppo di Galois. Nel gruppo di Galois di un'equazione di quinto grado dovrebbe anche esserci un ciclo di ordine 5 per tenere conto del fatto che una rotazione di tutte le radici non altera le relazioni simmetriche.

Consideriamo ad esempio l'equazione di grado 5 a coefficienti in $\mathbf{Q}$

$$x^5 - 16x + 2 = 0,$$

che ha tre soluzioni reali (non razionali) e due complesse. Pertanto è irriducibile in $\mathbf{Q}$. Il gruppo di Galois di questa equazione è un sottogruppo di S_5, ma dovendo contenere un ciclo di ordine 5 e uno scambio per la presenza di due radici complesse coniugate, coincide con tutto S_5. Però si può verificare che S_5 non ammette una catena di sottogruppi uno contenuto nel precedente fino ad arrivare al sottogruppo banale, per cui non è possibile risolvere l'equazione data per radicali.

Un'altra conseguenza del teorema di Galois è la seguente: un'equazione irriducibile avente per grado un numero primo è risolubile per radicali se e solo se tutte le radici possono essere espresse in modo razionale da due qualsiasi di esse. Corollario di questa proprietà è il seguente teorema di Kronecker (1856): un'equazione irriducibile avente per grado un numero primo ≥ 5 può essere risolta per radicali solo se ha una sola radice reale oppure ha tutte radici reali.

Equazioni di quinto grado risolubili per radicali

Basandosi sulla teoria di Galois, Cayley trovò un criterio generale per determinare se una data equazione di quinto grado è risolubile. Nella seconda metà del 19° secolo Glashan, Young e Runge trovarono che se l'equazione a coefficienti razionali era nella forma di Bring-Jerrand poteva essere risolta con radicali se e solo se $b_1 = 0$ oppure se esistono due numeri razionali μ e ν tali che

$$b_1 = \frac{5\mu^4(4\nu+3)}{\nu^2+1}, \quad b_0 = \frac{4\mu^5(2\nu+1)(4\nu+3)}{\nu^2+1}.$$

Oltre alle equazioni nella forma di Bring-Jerrand ci sono 5 equazioni della forma $x^5 + a_2x^2 + a_0 = 0$ ed esattamente

$$x^5 - 2s^3x^2 - s^5/5, \quad x^5 - 100s^3x^2 - 1000s^5, \quad x^5 - 5s^3x^2 - 3s^5,$$
$$x^5 - 5s^3x^2 + 15s^5, \quad x^5 - 25s^3x^2 - 300s^5,$$

dove s è un fattore di scalatura. Molti altri esempi possono essere trovati in letteratura.

3.3 Altre proprietà

Si riportano qui alcuni risultati che pur non essendo fondamentali per la teoria delle equazioni sono tuttavia utili complementi.

3.3.1 Radici reali di polinomi a coefficienti reali

Nel caso dei coefficienti reali il teorema fondamentale viene espresso anche nella forma: "il campo dei numeri complessi è la chiusura algebrica del campo dei numeri reali".

Si nota che un'equazione $p(x) = 0$ a coefficienti reali, se ha una soluzione complessa z, ha pure la soluzione coniugata $\overline{z}$, con la stessa molteplicità. Infatti $p(z)$ viene calcolata con un numero finito di operazioni razionali eseguite su z e sui coefficienti di $p(x)$, e $p(\overline{z})$ è il risultato delle stesse operazioni eseguite su $\overline{z}$ e sui coniugati dei coefficienti di $p(x)$. Se questi sono reali è

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = 0.$$

Quindi anche $\overline{z}$ è soluzione. Dalla (3.1) segue che ogni polinomio a coefficienti reali può venire scomposto nel prodotto di fattori reali di primo e secondo grado. Conseguenza di questo fatto è che un'equazione a coefficienti reali di grado dispari ha sempre un numero dispari di soluzioni reali.

Il problema della determinazione del numero di radici reali di un polinomio a coefficienti reali che stanno in un dato intervallo è molto importante ed è stato risolto in modo sorprendentemente semplice dal francese Sturm (1803-1855) utilizzando le proprietà di una particolare successione di polinomi $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, che verifica le seguenti proprietà:

1. $p_m(x)$ non cambia segno,
2. se in un punto ξ è $p_i(\xi) = 0$, allora $p_{i-1}(\xi)p_{i+1}(\xi) < 0$, per $i = 1, 2, \ldots, m-1$,
3. se in un punto ξ è $p_0(\xi) = 0$, allora $p_0'(\xi)p_1(\xi) < 0$ (e quindi $p_0(x)$ ha tutti zeri di molteplicità 1).

Una tale successione è appunto detta *successione di Sturm* del polinomio $p_0(x)$.

Una successione di Sturm di un polinomio $p_0(x) = p(x)$ può essere costruita con il procedimento delle divisioni successive per la determinazione del massimo comun divisore di $p(x)$ e $p'(x)$: posto

$$r_0(x) = p(x), \quad r_1(x) = -p'(x),$$

si calcolano i quozienti $q_i(x)$ e i resti cambiati di segno $r_i(x)$, delle divisioni di $r_{i-2}(x)$ per $r_{i-1}(x)$, cioè

$$r_{i-2}(x) = q_i(x)r_{i-1}(x) - r_i(x), \quad \text{per} \quad i = 2, \ldots, m+1,$$

finché

$$r_{m+1}(x) = 0.$$

I polinomi $r_i(x)$ hanno grado decrescente e l'ultimo polinomio costruito $r_m(x)$ è, a meno del segno, il massimo comun divisore di $p(x)$ e $p'(x)$. Se $r_m(x)$ ha grado zero, i polinomi $p(x)$ e $p'(x)$ non hanno zeri in comune e quindi $p(x)$ ha tutti zeri di molteplicità 1. In tal caso la successione di Sturm di $p(x)$ è

$$p_i(x) = r_i(x), \quad \text{per} \quad i = 0, \ldots, m.$$

Se $r_m(x)$ ha grado maggiore di zero, esso divide tutti i polinomi $r_i(x)$, $i = 0, \ldots, m$, ed ha per zeri gli zeri di molteplicità maggiore di 1 di $p(x)$. In tal caso la successione di Sturm di $p(x)$ è

$$p_i(x) = \frac{r_i(x)}{r_m(x)}, \quad \text{per} \quad i = 0, \ldots, m.$$

È facile verificare che la successione così costruita soddisfa le tre proprietà della definizione.

Fissato un punto ξ, si costruisce la successione $p_0(\xi), p_1(\xi), \ldots, p_m(\xi)$ (se fosse $p_i(\xi) = 0$ per un indice $i < m$, si attribuisce a tale valore il segno di $p_{i+1}(\xi)$) e si indica con $w(\xi)$ il numero di *cambiamenti di segno* di tale successione. Vale il seguente teorema: se $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, è una successione di Sturm di $p_0(x)$, il numero $w(b) - w(a)$ è uguale al numero di zeri di $p_0(x)$ appartenenti all'intervallo $[a, b)$.

Nella tesi del teorema l'intervallo $[a, b)$ è aperto a destra perché se fosse $p_0(b) = 0$, poiché a $p_0(b)$ viene assegnato lo stesso segno assunto in b da $p_1(x)$, che è diverso da zero in un intorno sinistro di b, $w(x)$ non cambia in tale intorno. Perciò la radice b non altera il numero di variazioni di segno.

Gli estremi a e b dell'intervallo a cui si riferisce il teorema possono essere anche $-\infty$ e $+\infty$: in tal caso si assume come segno dell'i-esimo polinomio quello del corrispondente limite. È così possibile determinare il numero complessivo di radici reali di un polinomio.

Come esempio costruiamo la successione di Sturm di due polinomi di quinto grado. Per il polinomio

$$p(x) = x^5 - 12x^4 + 52x^3 - 100x^2 + 83x - 23$$

si ha, a meno di costanti moltiplicative positive,

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= x^5 - 12x^4 + 52x^3 - 100x^2 + 83x - 23, \\
p_1(x) &= -5x^4 + 48x^3 - 156x^2 + 200x - 83, \\
p_2(x) &= 56x^3 - 372x^2 + 740x - 421, \\
p_3(x) &= -260x^2 + 1034x - 883, \\
p_4(x) &= 3786x - 7417, \\
p_5(x) &= -1.
\end{aligned}$$

Valutando i polinomi in alcuni punti interi opportunamente scelti si ottiene la seguente tabella dei segni

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$w(x)$
0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
1	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
2	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
3	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
4	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	4
5	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	5

Dall'ultima colonna risulta che tutti gli zeri sono reali e positivi e che

$$0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3 < 3 < x_4 < 4 < x_5 < 5.$$

Per il polinomio

$$p(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 10x - 24$$

si ha

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 10x - 24,\\
p_1(x) &= -5x^4 + 16x^3 - 12x^2 + 34x - 10,\\
p_2(x) &= 24x^3 + 207x^2 - 64x + 560,\\
p_3(x) &= 4111x^2 - 2368x + 10672,\\
p_4(x) &= -1535x + 22723,\\
p_5(x) &= -1.
\end{aligned}$$

La tabella dei segni risulta

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$	$w(x)$
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	2
0	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	3

Ne segue che il polinomio ha una sola radice reale, che risulta essere positiva.

3.3.2 Radici razionali di polinomi a coefficienti razionali

Un caso particolare di equazione a coefficienti reali è quello di un'equazione a coefficienti razionali. Moltiplicando opportunamente si ottiene un'equazione della forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0,$$

con coefficienti a_i interi. Se un'equazione di questo tipo ha soluzioni razionali, esse sono della forma p/q, dove p è un divisore di a_0 e q è un divisore di a_n e p/q ridotta ai minimi termini. Infatti sostituendo si ha

$$a_n(p/q)^n + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + ... + a_1(p/q) + a_0 = 0,$$

e moltiplicando per q^n,

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_1 p\, q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Ora p divide i primi n termini, dunque deve dividere anche l'ultimo termine $a_0 q^n$. Dato che p e q sono primi fra loro, p deve dividere a_0. Con un ragionamento analogo si vede che q divide a_n.

Ad esempio, se abbiamo un'equazione della forma

$$3x^3 - 10x^2 + x - 4 = 0,$$

le eventuali radici razionali vanno ricercate nell'insieme

$$\left\{ \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm 4, \pm 2, \pm 1 \right\}.$$

Come si verifica, nessuno di questi numeri soddisfa l'equazione, che quindi non ha radici razionali.

Se il polinomio è monico, cioè è $a_n = 1$, le eventuali radici razionali sono intere e vanno ricercate fra i divisori di a_0.

3.3.3 Limitazioni superiori delle radici

Dal punto di vista pratico è spesso utile conoscere delle limitazioni superiori delle radici x_i, $i = 1, \ldots, n$, del polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Sostituendo $x_i \neq 0$ a x si ha

$$x_i^n = -\sum_{j=0}^{n-1} a_i\, x_i^j. \tag{3.4}$$

O $|x_i| \leq 1$ oppure $|x_i| > 1$ e in tal caso

$$|x_i|^n \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \max_{j=0,\ldots,n-1} |x_i|^j \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\; |x_i|^{n-1},$$

da cui

$$|x_i| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|,$$

e quindi

$$|x_i| \leq \max\{1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\}.$$

Un'altra limitazione si ottiene dalla (3.4) scrivendo

$$|x_i|^n \leq \max_{j=0,\dots,n-1} |a_j| \sum_{j=0}^{n-1} |x_i|^j \leq \max_{j=0,\dots,n-1} |a_j| \, \frac{|x_i|^n}{|x_i|-1} \, ,$$

e moltiplicando per $|x_i| - 1$

$$|x_i|^{n+1} \leq (1 + \max_{j=0,\dots,n-1} |a_j|) \, |x_i|^n,$$

da cui

$$|x_i| \leq 1 + \max_{j=0,\dots,n-1} |a_j|.$$

Un terza limitazione si ottiene dalla (3.4) scrivendo

$$x_i^n = -\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}, \quad \text{dove} \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_i^{n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$|x_i|^{2n} = |\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}|^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|_2^2 \, \|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \|\boldsymbol{a}\|_2^2 \sum_{j=0}^{n-1} |x_i|^{2j} \leq \|\boldsymbol{a}\|_2^2 \, \frac{|x_i|^{2n}}{|x_i|^2 - 1} \, ,$$

e moltiplicando per $|x_i|^2 - 1$

$$|x_i|^{2n+2} \leq (1 + \|\boldsymbol{a}\|_2^2) \, |x_i|^{2n},$$

da cui

$$|x_i|^2 \leq 1 + \|\boldsymbol{a}\|_2^2,$$

e quindi

$$|x_i| \leq \sqrt{1 + \|\boldsymbol{a}\|_2^2} = \sqrt{1 + \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2}.$$

3.4 La maledizione delle equazioni

Alcuni dei protagonisti di questa nostra storia sono finiti male.

– Ippaso di Metaponto che faceva parte della scuola pitagorica e teorizzò l'esistenza di quantità incommensurabili, fu dichiarato empio, bandito dalla scuola e morì poco tempo dopo vittima di un naufragio.

– Archimede venne trucidato da un soldato romano durante il saccheggio di Siracusa a seguito della seconda guerra punica, nonostante che il generale Marcello avesse dato l'ordine di salvargli la vita.

– Tartaglia era di umile estrazione e mentre cercava di riscattarsi da uno stato di povertà, insultò Cardano, perse ogni prestigio ad opera di Ferrari e sparì dalla scena.

– Cardano, che pure era uno stimato professore, visse una vita infelice a causa dei suoi figli. Venne incarcerato dall'Inquisizione per avere tentato di fare l'oroscopo di Cristo.

– Ferrari morì avvelenato, probabilmente dalla sorella per una questione di eredità.

– Ruffini contrasse il tifo e quasi ne morì. Non si rimise competamente e dovette rinunciare all'insegnamento.

– Abel morì povero a 29 anni, 2 giorni prima che gli arrivasse la comunicazione che gli era stato conferito un incarico accademico che lo avrebbe riscattato dalla sua povertà.

– Galois morì a 20 anni in un duello di cui non si è mai saputa veramente la ragione. Ma in tutta la sua breve vita aveva trascorso parecchio tempo in prigione per le sue idee politiche.

Bibliografia

G. Ferrarese, M. Roggero, G. Tamone, Progetto MIUR Lauree Scientifiche: Una introduzione all'algebra moderna
http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/roggero/10%20Lezioni17Gen2008.pdf

P. Ellia, Appunti sulla teoria di Galois
http://web.unife.it/utenti/philippe.ellia/Docs/Galois-2011-2012.pdf

Teorema delle radici razionali
http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_delle_radici_razionali

The fundamental theorem of algebra
http://www-history.mcs.st-andrws.ac.uk/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra.html

Fundamental theorem of algebra
http://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra

The solution of equations of the fifth degree
http://www.ams.org/bookstore/pspdf/stml-35-prev.pdf

Quintic function
http://en.wikipedia.org/wiki/Quintic_function

D.D. Blair, Insights into solvability by radicals
http://dakota.tensen.net/wiki/images/7/71/Quintic.pdf