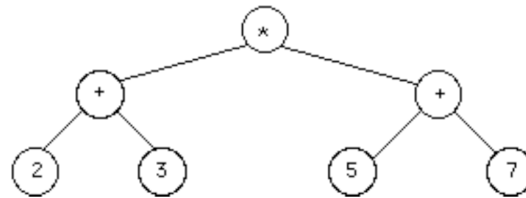


Espressioni Aritmetiche

La scrittura e il calcolo di espressioni aritmetiche sono problemi, a prima vista semplici, che nascondono insospettite complicazioni e si prestano ad una interessante trattazione. Prendiamo come esempio il calcolo della espressione aritmetica rappresentata dall'albero:



Nella notazione algebrica comunemente usata l'espressione si scrive:

$$(2+3)*(5+7)$$

il cui valore è 60. Eliminare le parentesi porterebbe all'espressione:

$$2+3*5+7$$

che comunemente viene valutata 24.

Tale valutazione deriva dall'aver attribuita precedenza all'operatore *. Senza tale precedenza l'espressione sarebbe ambigua. Nessuna ambiguità invece si introduce omettendo l'operatore *:

$$(2+3)(5+7)$$

e quest'ultima è la notazione più usata in algebra. Un ulteriore coppia di parentesi sarebbe ridondante ma renderebbe più omogenea la scrittura:

$$((2+3)*(5+7))$$

Le notazioni polacche

Coloro che hanno fatto esperienza di calcolo sulle calcolatrici Hewlett-Packard conosceranno già le cosiddette notazioni polacche,

- diretta: * + 2 3 + 5 7
- inversa: 2 3 + 5 7 + *

Le notazioni polacche, seppur prive di parentesi, non sono ambigue purché siano chiaramente delimitate le costanti numeriche (qui si è usato il *blank* come separatore altrimenti la sequenza **2** seguito da **3** poteva essere confusa col valore **23**).

Infine, volendo evitare il cosiddetto *zucchero sintattico*, trattando, cioè, la somma e il prodotto come qualunque altra funzione di due variabili, si ha la notazione prefissa:

prodotto(somma(2,3), somma(5,7))

Nel seguito ci limitiamo per semplicità a trattare le operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri di una cifra. Presentiamo dapprima per ciascuna forma la grammatica generativa.

Le grammatiche delle varie notazioni

- La notazione infissa ha la grammatica:

$\langle \text{numero} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

$\langle \text{espr} \rangle ::= (\langle \text{espr} \rangle + \langle \text{espr} \rangle) \mid (\langle \text{espr} \rangle * \langle \text{espr} \rangle) \mid \langle \text{numero} \rangle$

Questa grammatica prevede le parentesi ad ogni livello.

- Più complessa è la specifica di una grammatica non ambigua che, assegnando la precedenza all'operatore di moltiplicazione, permetta di eliminare le parentesi superflue:

$\langle \text{numero} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

$\langle \text{espr} \rangle ::= \langle \text{espr} \rangle + \langle \text{term} \rangle \mid \langle \text{term} \rangle$

$\langle \text{term} \rangle ::= \langle \text{term} \rangle * \langle \text{factor} \rangle \mid \langle \text{factor} \rangle$

$\langle \text{factor} \rangle ::= \langle \text{numero} \rangle \mid (\langle \text{espr} \rangle)$

Questa grammatica non sarà più trattata nel seguito.

- La notazione polacca diretta ha la grammatica:

$\langle \text{numero} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

$\langle \text{espr} \rangle ::= + \langle \text{espr} \rangle \langle \text{espr} \rangle \mid * \langle \text{espr} \rangle \langle \text{espr} \rangle \mid \langle \text{numero} \rangle$

- Molto simile è la notazione prefissa:

$\langle \text{numero} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

$\langle \text{espr} \rangle ::= \text{somma}(\langle \text{espr} \rangle, \langle \text{espr} \rangle) \mid \text{prod}(\langle \text{espr} \rangle, \langle \text{espr} \rangle) \mid \langle \text{numero} \rangle$

- La notazione polacca inversa ha la grammatica:

$\langle \text{numero} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

$\langle \text{espr} \rangle ::= \langle \text{espr} \rangle \langle \text{espr} \rangle + \mid \langle \text{espr} \rangle \langle \text{espr} \rangle * \mid \langle \text{numero} \rangle$