Lezione n.7
ANALISI STATISTICA DI RETI COMPLESSE

Materiale didattico:
Peer-to-Peer Systems and Applications
Capitolo 6

RIASSUNTO DELLA LEZIONE

- Introduzione : Reti complesse
- Small-Worlds
  - Social Networks
  - L'esperimento di Milgram
- Grafi Random
- Il modello Watts-Strogatz, il modello di Kleinberg
- Scale-Free Networks
  - Risultati sperimentali
  - Il modello di Barabasi-Albert
- Applicazioni ai sistemi P2P

RETI COMPLESSE: ESEMPI

- Diversi fenomeni possono essere modellati mediante reti complesse, caratterizzate da un altissimo numero di nodi

- Esempi:
  - Social networks
  - Information Networks
  - Technological Networks
  - Biological Networks
  - ……

- World Wide Web: nodi corrispondono ai documenti, gli archi ai links (URL) che collegano i documenti
- Internet: nodi corrispondono ai routers, gli archi alle connessioni fisiche esistenti tra i routers
- Reti P2P: nodi corrispondono ai peer, gli archi sono quelli dell'overlay network

RETI COMPLESSE: ANALISI

- Reti complesse: contengono milioni di nodi. Definire modelli appropriati per queste reti è necessario per descriverne proprietà topologiche

- gli strumenti classici della teoria dei grafi classica non sono idonei

- Grafi Random (Erdos, Renyi, anni '50) in un grafo di N nodi ogni coppia di nodi viene connessa con probabilità p. Ogni connessione è indipendente dalle altre (distribuzione binomiale o di Poisson).

- Anni '90: La capacità di calcolo dei sistemi ha permesso un'analisi sperimentale della struttura di reti complesse reali contenenti milioni di nodi

- Da questa analisi è risultato che il modello dei random graphs non ripecchia completamente la struttura di molti reti complesse

RETI COMPLESSE: ANALISI

- Negli ultimi 10 anni sono stati proposti nuovi modelli che descrivono più fedelmente la struttura delle reti complesse
- Modello di Watts-Strogatz, Kleinberg, Barabasi Albert
- Proprietà interessanti descritte in questi modelli
  - Small Worlds. Cercare un fondamento scientifico per situazioni come la seguente, che riporta il dialogo tra due amici ed evidenzia una proprietà delle social networks
    - *ciao, mi sono trasferito a Lucca*
    - *Ah sì, ma allora forse conosci Mario Rossi?*
    - *Si, lo conosco. Certo che il mondo è piccolo....*
  - Clustering
  - Degree Distribution

SMALL WORLDS NETWORKS

- Le reti complesse sono caratterizzate da una proprietà riferita come

  Small World:

  - definiamo la distanza tra due nodi come il numero di archi che appartengono al cammino più breve che li collega
  - nella maggior parte delle reti si osserva che la distanza tra due nodi qualsiasi delle rete è relativamente piccola rispetto alle dimensioni della rete
- Proprietà osservata inizialmente in reti sociali (esperimento di Milgram, rete dei co-attori, etc)
- Nei grafi random la distanza tra due nodi qualsiasi è dell'ordine del logaritmo del numero di nodi.
- I grafi random modellano reti di tipo small world

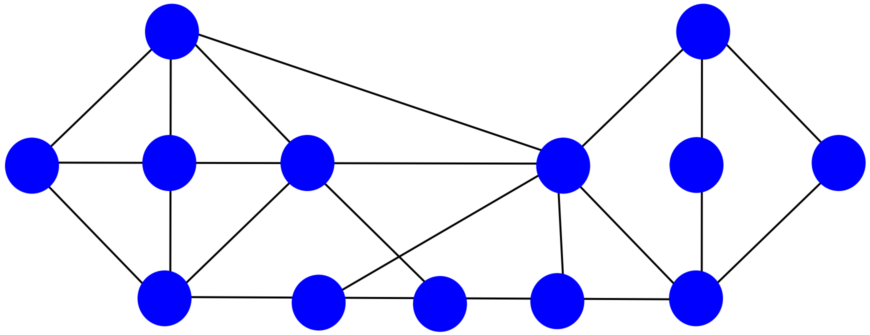
SMALL WORLD SOCIAL NETWORKS

Social Networks: gli archi del grafo descrivono le interazioni sociali tra un insieme di individui (vertici del grafo)

- relazioni di amicizia
- relazioni commerciali tra compagnie
- chiamate telefoniche
- collaboration networks:
    - film collaboration network: descrive gli attori che hanno recitato insieme in almeno un file (internet movie database)
    - coauthorship network: vertici, autori di pubblicazioni scientifiche, archi congiungono due individui se e solo se sono stati coautori in qualche lavoro

SOCIAL NETWORKS: STRUTTURA

- Come può essere descritta la struttura di una social network?
- Intuizione: ogni persona ha un insieme di conoscenze generalmente riguardanti le persone vicine, es: i vicini di casa, i colleghi, i membri della squadra in cui gioca
- La rete risultante dovrebbe avere una struttura „a griglia"



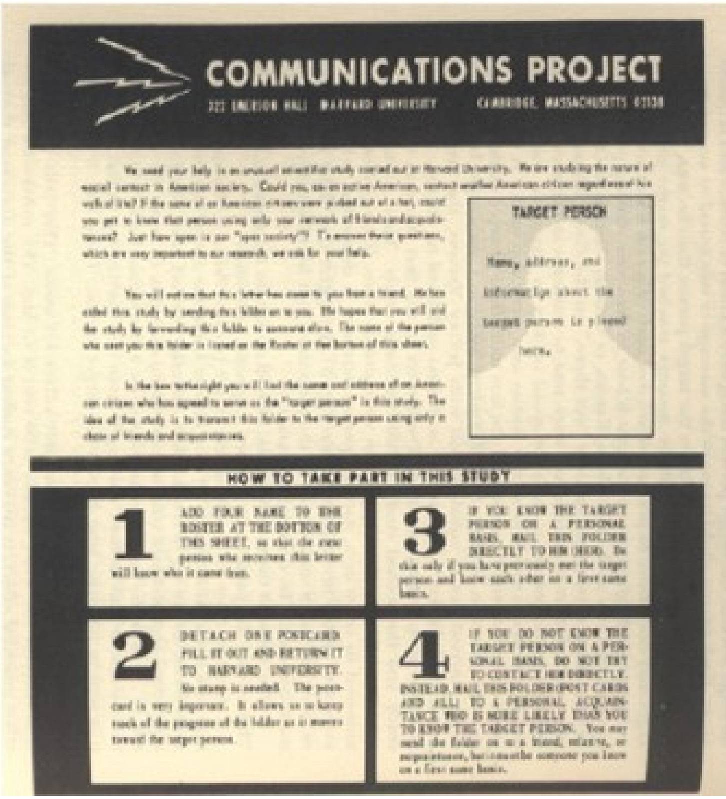
- Se il modello descrive correttamente la realtà, il diametro di una social network di n nodi cresce come $O(\sqrt{n})$.
- I risultati sperimentali dimostrano che questa intuizione non è corretta

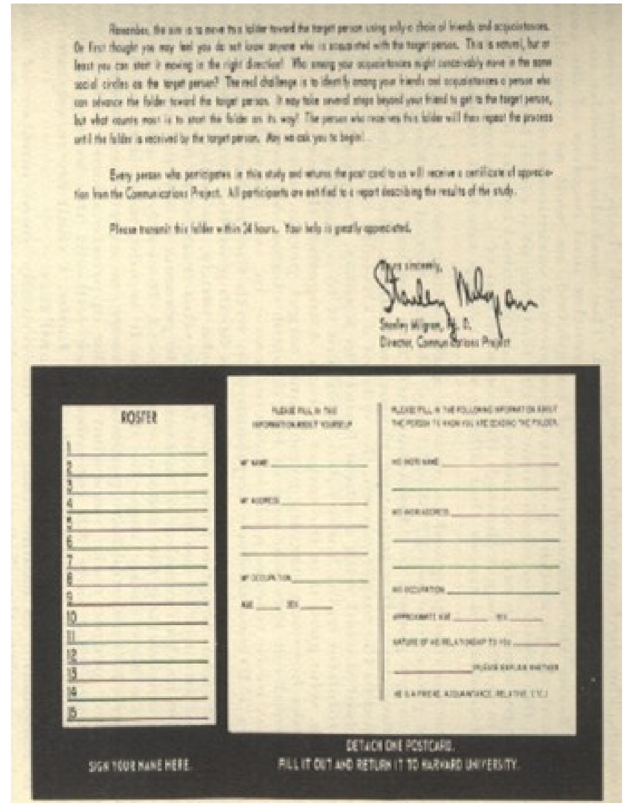
SOCIAL NETWORKS: L'ESPERIMENTO DI MILGRAM

Nel 1960 il sociologo Stanley Milgram (Harvald)condusse una serie di esperimenti per analizzare la struttura di una social network

- ad alcune persone (circa 160) scelte in modo casuale in Nebraska fu chiesto di consegnare una lettera ad un operatore di borsa a Boston, di cui era noto il nome.
- ogni persona conosceva solamente queste informazioni sul destinatario della lettera
- fu chiesto ad ognuno di non usare l'indirizzo del destinatario, ma di consegnare la lettera solo a conoscenti diretti
- ogni persona doveva consegnare la lettera solo a persone direttamente conosciute che riteneva avere qualche punto di contatto con il destinatario della lettera

SOCIAL NETWORKS: L'ESPERIMENTO DI MILGRAM





L'ESPERIMENTO DI MILGRAM: I RISULTATI

- Milgram calcolò il numero medio di "passaggi di mano" di ogni lettera che aveva raggiunto il destinatario
- 6 degree of separation: ogni lettera arrivata a destinazione aveva richiesto non più di 6 passaggi
- Questo valore risulta inferiore al valore $O(\sqrt{n})$ che misura il diametro di una social network con struttura "grid like"
- L'esperimento dimostrò che il diametro della social network analizzata risultava molto piccolo, nonostante la località della rete
- Conclusione: il modello "a griglia" non è sufficiente a descrivere la struttura di quella rete sociale

L'ORACOLO DI KEVIN BACON

- film collaboration network: descrive gli attori che hanno recitato insieme in almeno un file (internet novie database)
- Una "demo" che questa rete è una small world network è accessibile alla URL

  http://oracleofbacon.org/, mediante il gioco di Kevin Bacon
- Gioco di Kevin Bacon:
  - Pensa ad un attore A
  - Se A ha recitato in un film con Bacon, A ha numero di Bacon = 1
  - Se A non ha mai recitato personalmente con Bacon, ma ha recitato con qualcuno che a sua volta ha recitato con Bacon, A ha numero di Bacon =2
  - e così via....

L'ORACOLO DI KEVIN BACON

L'ORACOLO DI KEVIN BACON

L'ORACOLO DI KEVIN BACON

- Tutti i dati sugli attori e sui film provengono dall'Internet Movie Database dell'Università della Virginia
- Ogni attore è separato da Kevin Bacon da pochi link
- La media dei Bacon Number è 2.78
- Kevin Bacon, un attore non di primo piano, sembra essere al centro della rete di collaborazione tra gli attori, ma.... le cose non stanno realmente così
- Kevin Bacon posside un numero relativamente limitato di links con altri attori, ha girato un numero relativamente limitato di films e la distanza media di un attore da lui (2.78) è relativamente alta (vedere lucido successivo)

CENTRALITA' DEGLI ATTORI (212250 ATTORI)

Rank	Name	Average distance	#of movies	# of links
1	Rod Steiger	2.537527	112	2562
2	Donald Pleasence	2.542376	180	2874
3	Martin Sheen	2.551210	136	3501
4	Christopher Lee	2.552497	201	2993
5	Robert Mitchum	2.557181	136	2905
6	Charlton Heston	2.566284	104	2552
7	Eddie Albert	2.567036	112	3333
8	Robert Vaughn	2.570193	126	2761
9	Donald Sutherland	2.577880	107	2865
10	John Gielgud	2.578980	122	2942
11	Anthony Quinn	2.579750	146	2978
12	James Earl Jones	2.584440	112	3787
…				
876	Kevin Bacon	2.786981	46	1811

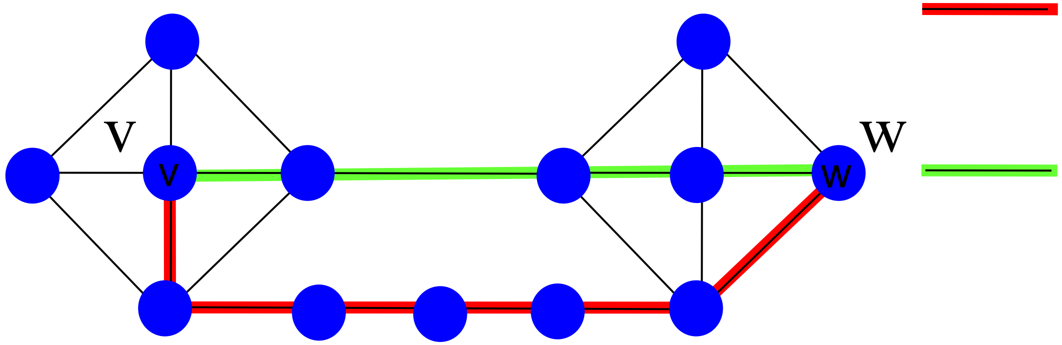
DISTANZA TRA ATTORI

SMALL WORLDS NETWORKS

- Conclusione: la rete degli attori è una small world
- Infine alcune curiosità. Six Degrees of Separation:
  - Six Degrees of Separation: nel 1991 una commedia teatrale di John Guare, da cui è stato tratto nel 1993 un film di Fred Schepisi.
- *Citazione dal film : "I read somewhere that everybody on this planet is separated by only six other people. Six degrees of separation between us and everyone else on this planet. The President of the United States, a gondolier in Venice, just fill in the names. I find that extremely comforting, that we're so close, but I also find it like Chinese water torture that we're so close because you have to find the right six people to make the connection. It's not just big names -- it's anyone. A native in a rain forest, a Tierra del Fuegan, an Eskimo. I am bound -- you are bound -- to everyone on this planet by a trail of six people...... How everyone is a new door, opening into other worlds."*

SMALL WORLD: UNA DEFINIZIONE PIU' RIGOROSA

- cammino P(v,w) è un insieme di vertici $\{v=v_0, v_1, \ldots, v_k=w\}$ con (v_i, v_{i+1}) appartenenti ad E, $0 \leq i \leq k$
- la lunghezza del cammino |P(v,w)| è definita come il numero di archi in P (si considerano archi non pesati)
- distanza d(v,w) : la lunghezza del cammino minimo tra v e w
- diametro D(G) di un grafo G: massima distanza esistente tra due nodi qualsiasi del grafo



SMALL WORLDS: UNA DEFINIZIONE PIU' RIGOROSA

- Small World Network = una qualsiasi coppia di nodi è collegata da un cammino caratterizzato da un numero molto limitato di hops

- Si considera L, la distanze media tra coppie di nodi del grafo di n nodi

$$L = (\Sigma_{i>=j}\, d_{ij}) \,/\, [n(n+1)/2]$$

  dove d_{ij} è la distanza tra il vertice i ed il vertice j.

- NOTE: questa definizione nella media
  - include anche la distanza tra un nodo e se stesso, che è 0
  - si considerano reti (o sottoreti) connesse (altrimenti esisterebbero nodi con distanza infinita)
  - Utilizzata anche la media armonica: media dei reciproci delle distanze

- Una rete presenta un comportamento di tipo small world se e solo se L cresce in modo logaritmico (o inferiore) in funzione di n, dove n è il numero di nodi della rete. Il grado dei nodi del grafo ha un valore medio prefissato

SMALL WORLDS: IMPLICAZIONI

Implicazioni sulla dinamica di processi che avvengono su small worlds networks:

- Diffusione rapida dell'informazione su una small world network
- Esempio: diffusione di *gossips*
- Diffusione di un pacchetto su una rete
- Diffusione di un virus nella popolazione
- ....

CLUSTERED NETWORKS

- Una proprietà comune di molte reti complesse, specialmente delle social networks è l'alta clusterizzazione dei nodi
- Esempio: i miei amici sono amici tra di loro, le persone che io conosco, si conoscono, etc...
- Coefficiente di clusterizzazione: misura questa caratteristica delle reti
- Definizione intuitiva. Si consideri un nodo n con k vicini,
  - il coefficiente di clusterizzazione di n misura il rapporto tra il numero di connessioni esistenti tra i k vicini di n ed il numero totale di connessioni che possono essere definite tra di loro, $k(k-1)/2$
- Molte reti reali sono caratterizzate da un alto coefficiente di clusterizzazione
- I grafi random invece presentano un basso coefficiente di clusterizzazione
  - non sono un modello valido per molte reti reali

DEGREE DISTRIBUTION

Dato un grafo $G = (V,E)$

- outdegree $deg_+(v)$ of un nodo v = numero di vertici w connessi a v da un arco (v,w)

- indegree $deg_-(v)$ of v = numero di vertici w connessi a v da un arco (w,v)

- degree(v) = $deg_+(v) + deg_-(v)$

- Clique= sottografo in cui ogni nodo è connesso ad ogni altro nodo

DEGREE DISTRIBUTION

- Grado di un nodo = numero di archi incidenti in un nodo
- Analisi della distribuzione dei gradi dei nodi di una rete
  - Si calcola la probabilità che un nodo abbia grado k
- Grafi Random = Distribuzione di Poisson
- L'analisi sperimentale di diverse reti reali ha mostrato che la distribuzione dei gradi dei nodi della rete si discosta parecchio dalla distribuzione di Poisson
- Es: distribuzione dei gradi dei nodi per WEB, Internet, segue la legge

$$P(k) \cong k^{-\gamma}$$

  maggiore è il grado considerato, minore è la probabilità di individare nodi con quel grado all'interno della rete

- Scale free Networks (Barabasi Albert)

RETI COMPLESSE: ALTRE PROPRIETA'

Altre proprietà delle reti complesse

- Grado massimo, grado minimo,....

- Network resilience
  - Comportamento della rete in conseguenza di rimozione di nodi (es: vaccinazione di individui, attacchi ad Internet,...)

- Mixing patterns
  - Classi di vertici connessi

- Community Structures
  - Gruppi di nod connessi da molti archi, con pochi archi tra i gruppi

- .....vedere materiale consigliato

ALTRI ESEMPI DI RETI COMPLESSE

Information Networks (Knowledge Networks) (Eugene Garfield):

- Rete definita dai riferimenti (citazioni) presenti tra pubblicazioni accademiche: nodi= articoli pubblicati, archi= citazioni
- World Wide Web: nodi: pagine web, archi= iperlinks che collegano le pagine
- P2P Networks

Technological Networks

- Reti costruite per la distribuzione di qualche risorsa (rete elettrica, internet, reti stradali,…)

Biological Networks

- Food web: i nodi corrispondono alle specie di un ecosistema, gli archi descrivono le relazioni predatore-preda
- Neural networks

MODELLI PER RETI COMPLESSE

- Problema: ricerca di un modello che riesca a descrivere in modo fedele il comportamento di una rete sociale

- Anni '90: il problema è stato affrontato approfonditamente anche per modellare reti complessi quali Internet, WWW e poi P2P

- Alcuni dei modelli proposti si sono dimostrati utili sia nel campo delle scienze sociali che in quello dell'informatica

- Modelli proposti
  - Random Graphs: modello semplice, ma non riesce a descrivere alcune proprietà interessanti, ad esempio le reti con alto fattore di clustering
  - Watts-Strogatz small worlds + clusterizzazione
  - Kleinberg utilizzato per definire overlays per reti P2P
  - Barabasi-Albert scale free networks

GRAFI RANDOM

- I grafi random rappresentano il modello più semplice per reti complesse
  - Assunzioni semplici
  - Proprietà analizzabili con strumenti statistici

- Idea Base: Dato un numero fisso n di vertici, gli archi vengono creati in modo casuale, secondo una certa distribuzione di probabilità

Modelli proposti

- Erdós-Renyi
- Gilbert

Si ricavano proprietà statistiche. Una proprietà si verifica con una certa probabilità.

GRAFI RANDOM: IL MODELLO DI ERDOS-RENYI

- Modello estremamente semplice:
  - si considerano N nodi
  - ogni coppia di nodi viene connessa da un arco con probabilità p

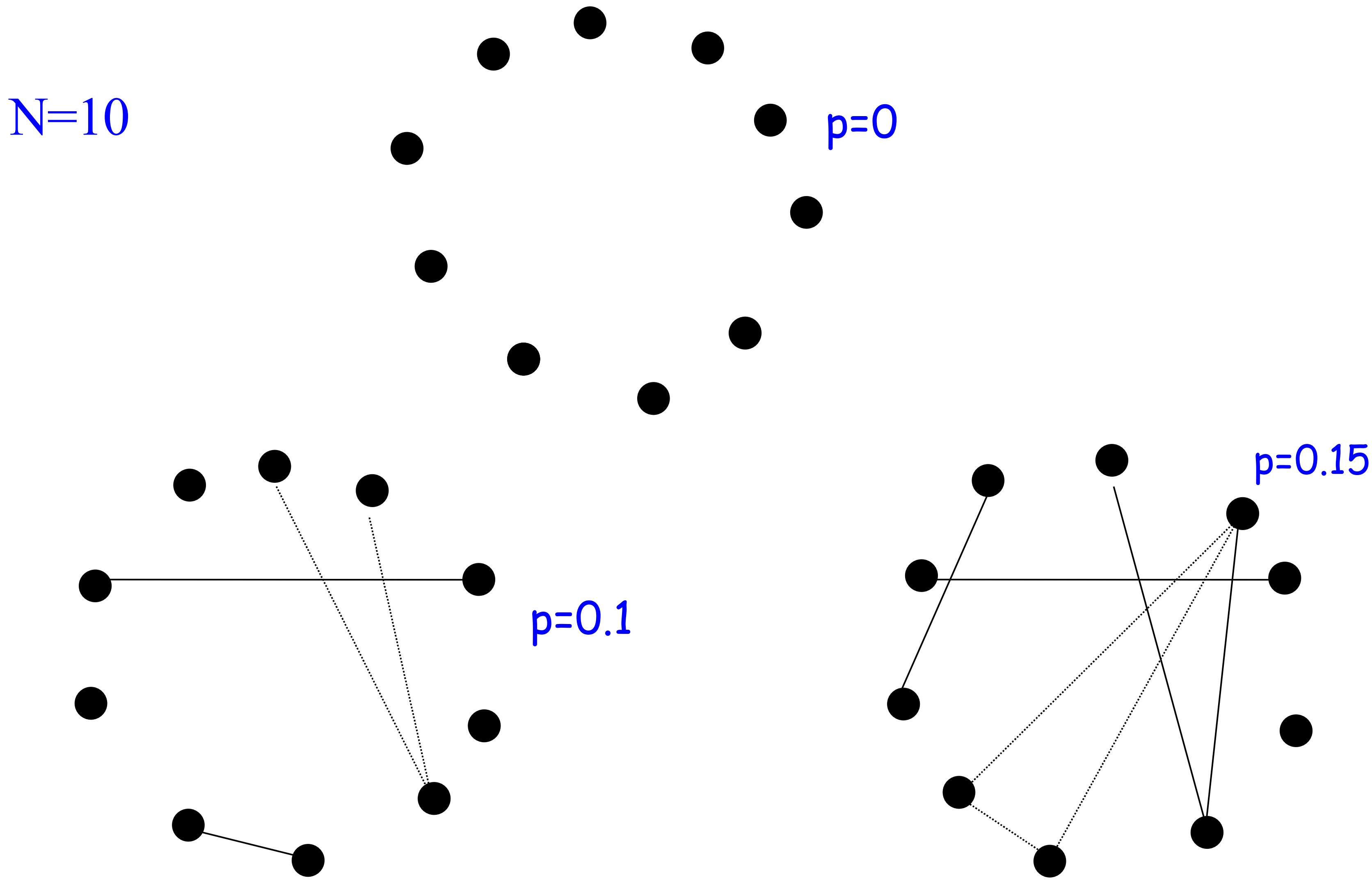
- Costruzione del grafo. Esempio: $p = \frac{1}{4} = 0.25$

  si considera una coppia di nodi (u,v), si genera un numero casuale x compreso tra 0 ed 1, se $x < p$, si definisce un arco tra u e v, altrimenti i nodi non vengono connessi

- Distribuzione binomiale: la presenza/assenza di un arco è indipendente da quella degli altri archi

- Numero medio n di archi per un grafo di N nodi $E(n)=p[N(N-1)/2]$

GRAFI RANDOM: IL MODELLO DI ERDOS RENYI



GRAFI RANDOM: IL MODELLO DI ERDOS RENYI

- Obiettivo dell'analisi dei grafi random: determinare la probabilità $p(N)$ in corrispondenza della quale il grafo ottenuto gode di una certa proprietà PR.

- Esempio: in corrispondenza di quale valore di $p(N)$ il grafo contiene sottografi con certe caratteristiche (ad esempio contiene triangoli,....)

- Si dimostra che data una proprietà PR esiste un valore critico $p_c(N)$ tale che
  - se $p(N)$ cresce meno velocemente di $p_c(N)$ per $N \to \infty$ allora ogni grafo corrispondente a p (N) non possiede la proprietà PR
  - altrimenti, se $p(N)$ cresce più velocemente di $p_c(N)$ per $N \to \infty$ allora ogni grafo corrispondente a $p(N)$ è caratterizzato da PR

- Si dimostra che il passaggio da grafi che non verificano PR a quelli che la verificano risulta brusco in corrispondenza del valore $p_c(N)$

GRAFI RANDOM: DEGREE DISTRIBUTION

- Grado di un nodo= numero di archi incidenti in quel nodo

- Intuizione: poichè in un grafo random le connessioni vengono create in modo casuale, con probabilità p, è ragionevole aspettarsi che
  - La maggior parte dei nodi abbia lo stesso grado k
  - Il valore approssimato di k sia uguale al grado medio $\langle k \rangle$ della rete

$$\langle k \rangle \approx pN$$

- Più formalmente:
  - Con una buona approssimazione, la funzione di distribuzione dei gradi dei nodi di un grafo random può essere approssimata con una distribuzione binomiale
  - La distribuzione binomiale può essere approssimata, per valori alti di N, con una distribuzione di Poisson

- I grafi random non descrivono appropriatamente le scale free networks

GRAFI RANDOM: DEGREE DISTRIBUTION

- Distribuzione di Poisson. Probabilità che un nodo abbia grado r:

$$P(X = r) = e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^{r} / r!$$

dove <k> è il valore medio del grado di un nodo

- Invece le scale free networks presentano una distribuzione del tipo

$$P(X = r) \cong r^{-\gamma}$$

- I grafi random non modellano le scale free networks in modo adeguato

GRAFI RANDOM: IL DIAMETRO

- Sappiamo che la maggior parte dei nodi hanno grado $\langle k \rangle$
- Dato un nodo n il numero medio di nodi a distanza d da n è $\langle k \rangle^d$
- Quindi, per raggiungere un qualsiasi nodo di una rete di N nodi saranno necessari L passi, dove $\langle K \rangle^L = N$
- Quindi il diametro della rete può essere calcolato come segue
  $\log \langle K \rangle^L = \log N \Rightarrow L * \log \langle K \rangle = \log N \Rightarrow L = \log N / \log \langle K \rangle$
- Il "grado di sepazione" di un grafo random cresce in modo logaritmico con il numero di nodi
- I grafi random sono small worlds !

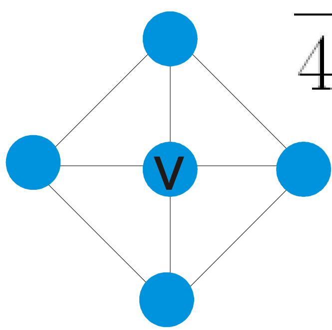
CLUSTERIZZAZIONE: DEFINIZIONE 1

Coefficente di clusterizzazione *C(v)* di un vertice v del grafo è calcolato come

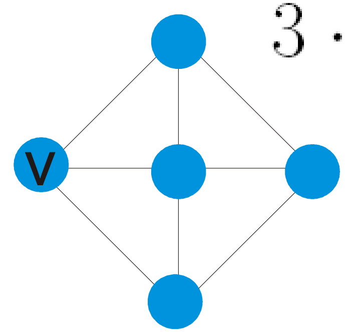
$$C(v) = \frac{e(v)}{deg(v)\,(deg(v)-1)\,/2}$$

e(v) denota il numero di connessioni esistenti tra i vicini di v

$$\frac{2 \cdot 4}{4 \cdot 3} = 2/3$$

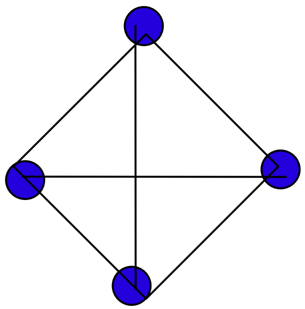


$$\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 2/3$$

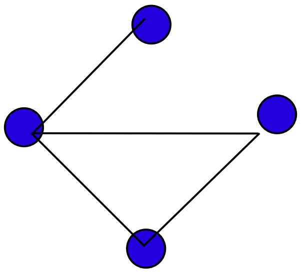


C(V) misura 'quanto i vicini di v formano strutture 'di tipo clique'

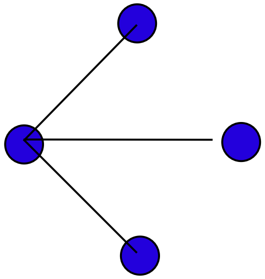
CLUSTERIZZAZIONE: DEFINIZIONE 1



$C = 1$



$C = 1/3$



$C = 0$

CLUSTERIZZAZIONE: DEFINIZIONE 2

- La definizione precedente viene talvolta ristretta a cliques contenenti tre vertici (triangolo)

- Tripla connessa ad un vertice v = v + due vertici ad esso connessi

- Coefficiente di clusterizzazione di un grafo

  C= (3*numero di triangoli nella rete) / numero di triple connesse

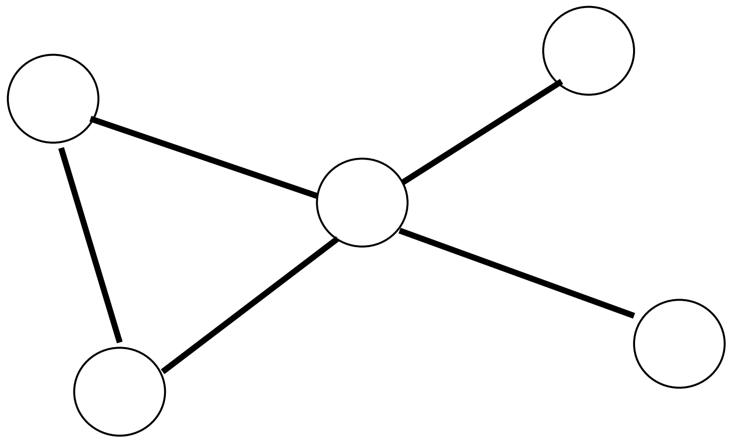
  fattore 3 misura il fatto che ogni triangolo contribuisce a 3 triple connesse

- C ($0 \leq C \leq 1$) misura la frazione di triple connesse che formano triangoli

- Un alto livello di clusterizzazione implica la presenza di molti "triangoli" sulla rete

- Clustering= transitività, se un vertice A è connesso ad un vertice B ed il vertice B è connesso al vertice C, è probabile che A risulti connesso a C

CLUSTERIZZAZIONE: DEFINIZIONE 2



La rete è caratterizzata da

- un unico triangolo
- 8 triple
- coefficiente di clusterizzazione $C = 3 * 1/8 = 3/8$

CLUSTERIZZAZIONE: DEFINIZIONE 3

- Definizione alternativa introdotta da Watts-Strogatz associa il coefficiente di clusterizzazione ad ogni nodo del grafo.

  C_i = numero di triangoli connessi ad i / numero di triple 'centrate' su i

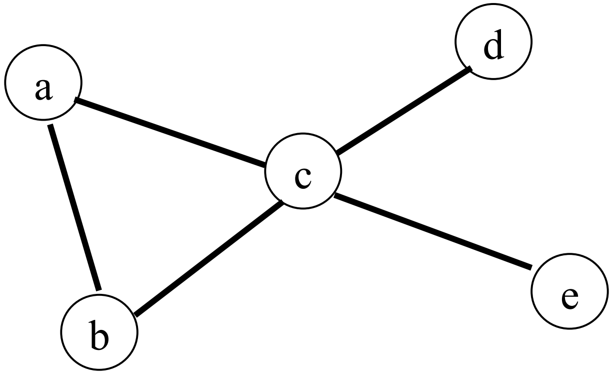
  per ogni vertice i del grafo

- $C_i = 0$ per i vertici di grado 0 o di grado 1

- Coefficiente di clusterizzazione associato al grafo

$$C=(1/n) * \Sigma_i C_i$$

CLUSTERIZZAZIONE: DEFINIZIONE 3



Coefficenti di clusterizzazione associati ai nodi:

Ca = 1
Cb =1
Cc = 1/6
Cd = 0
Ce = 0

Coefficiente di clusterizzazione del grafo:

C = (1+1+1/6) /5 = 13/30

GRAFI RANDOM: CLUSTERIZZAZIONE

- Clusterizzazione: se due nodi hanno un nodo vicino in comune è probabile che esista una connessione anche tra di essi
- In un grafo random la probabilità di connettere due nodi della rete è p, indipendentemente dal fatto che essi posseggano vicini a comune
- Il coefficente di clusterizzazione di un grafo random caratterizzato da una probabilità p è uguale a p.

Quindi i grafi casuali

- Sono reti small worlds
- Sono caratterizzati da un basso coefficiente di clusterizzazione e quindi hanno poca capacità di modellare l'aggregazione, caratteristica tipica di molte reti reali
- Il basso coefficiente di aggregazione consente di ottenere bassi gradi di separazione tra i nodi

GRAFI RANDOM VS. RETI REALI

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic, 1999	1
Internet, domain level	3015–6209	3.52–4.11	3.7–3.76	6.36–6.18	0.18–0.3	0.001	Yook *et al.*, 2001a, Pastor-Satorras *et al.*, 2001	2
Movie actors	225 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts and Strogatz, 1998	3
LANL co-authorship	52 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	4
MEDLINE co-authorship	1 520 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	5
SPIRES co-authorship	56 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	6
NCSTRL co-authorship	11 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	7
Math. co-authorship	70 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási *et al.*, 2001	8
Neurosci. co-authorship	209 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási *et al.*, 2001	9
E. coli, substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner and Fell, 2000	10
E. coli, reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner and Fell, 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya and Solé, 2000	12
Silwood Park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya and Solé, 2000	13
Words, co-occurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Ferrer i Cancho and Solé, 2001	14
Words, synonyms	22 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook *et al.*, 2001b	15
Power grid	4941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts and Strogatz, 1998	16
C. Elegans	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts and Strogatz, 1998	17

IL MODELLO DI WATTS-STROGATZ

- Watts-Strogatz considerano due caratteristiche fondamentali delle reti complesse:
  - il coefficente di clusterizzazione: misura la regolarità e la località della rete. Se tale coefficente è alto, gli archi collegano principalmente nodi vicini, piuttosto che vertici lontani.
  - la distanza tra i vertici.

- Se il coefficente di clusterizzazione è alto, la distanza media tra due nodi dovrebbe essere alta, perchè gli archi non sono "casuali" ma "locali"

- Ma..... la maggior parte delle reti osservate presenta un valore alto del coefficente di clusterizzazione (0.3-0.4) e un valore basso della distanza tra nodi

AL CONFINE TRA ORDINE E CAOS

Le idee fondamentali.

- Una rete regolare (ad esempio una griglia) presenta una forte aggregazione, ma non è una rete small world
- Un random graph è uno small world, ma non presenta aggregazione
- Si vuole definire un modello di rete che riunisca le due caratteristiche
  - Sufficientemente regolare (alto coefficiente di clustering)
  - Sufficientemente caotico per poter mantenere basso il grado di separazione tra i nodi (small worlds)

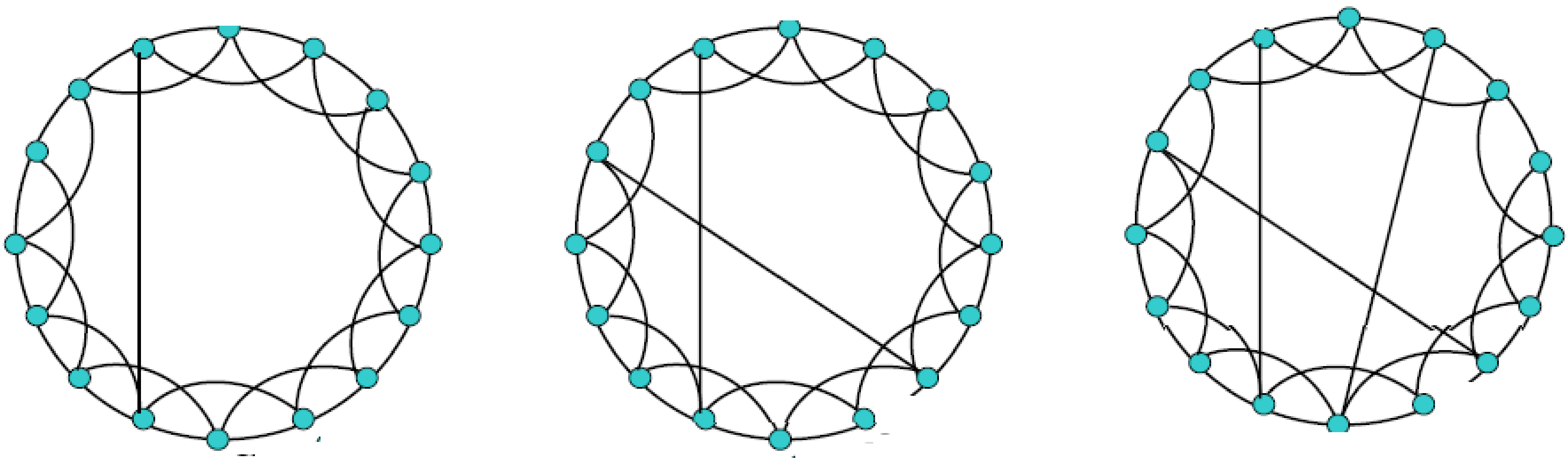
- Un modello che sia un compromesso tra ordine e caos....

IL MODELLO DI WATTS-STROGATZ

- Questo fenomeno non può essere spiegato mediante un modello grid-like, ne mediante un grafo random
  - una rete grid-like è caratterizzata da regolarità e località, ma da alto valore della distanza media
  - i grafi random hanno un coefficiente di clusterizzazione proporzionale a p.

- Watts-Strogatz propongono un modello ibrido
  - Si parte da un anello di n vertici
  - Si connette ogni vertice con i suoi k vicini sull'anello
  - Si 'riavvolge' ogni vertice con probabilità uguale a p, si mantiene fisso uno dei vertici e si sceglie un nuovo target come altro vertice, tra tutti i vertici,in maniera casuale

IL MODELLO DI WATTS STROGATZ

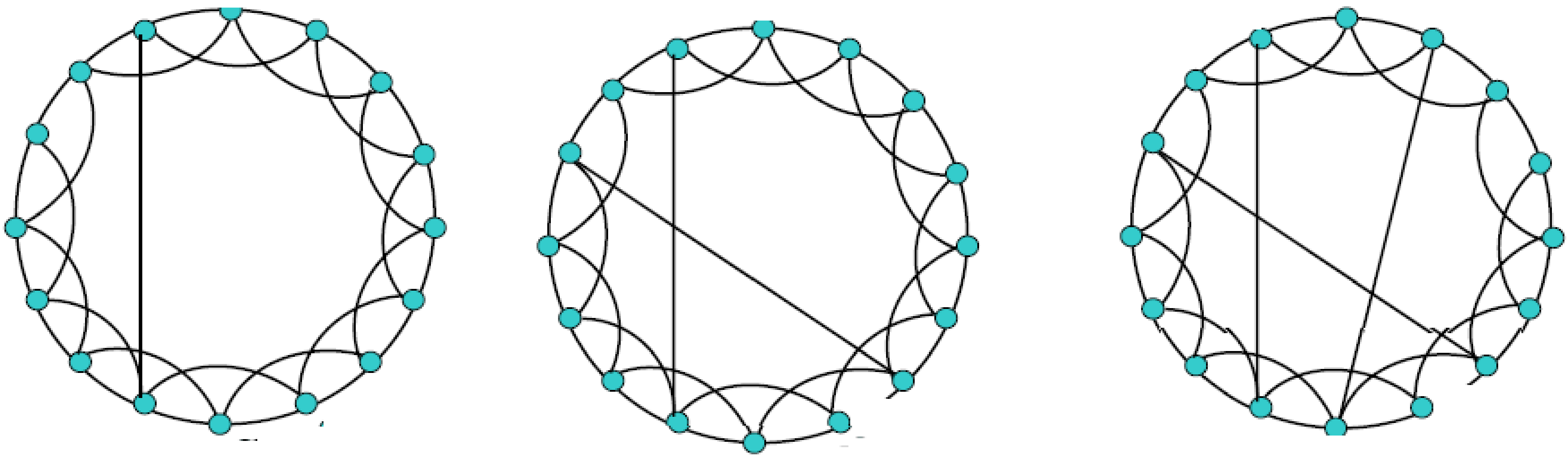


Procedura di costruzione del grafo

Si parte da un anello di n vertici e si connette ogni vertice con i suoi *k* vicini sull'anello

Si „riavvolge" un arco (v,w) con probabilità uguale a p: si mantiene fisso v e si sceglie un nuovo vertice w', scelto tra tutti i vertici, in modo casuale come destinazione dell'arco

IL MODELLO DI WATTS STROGATZ

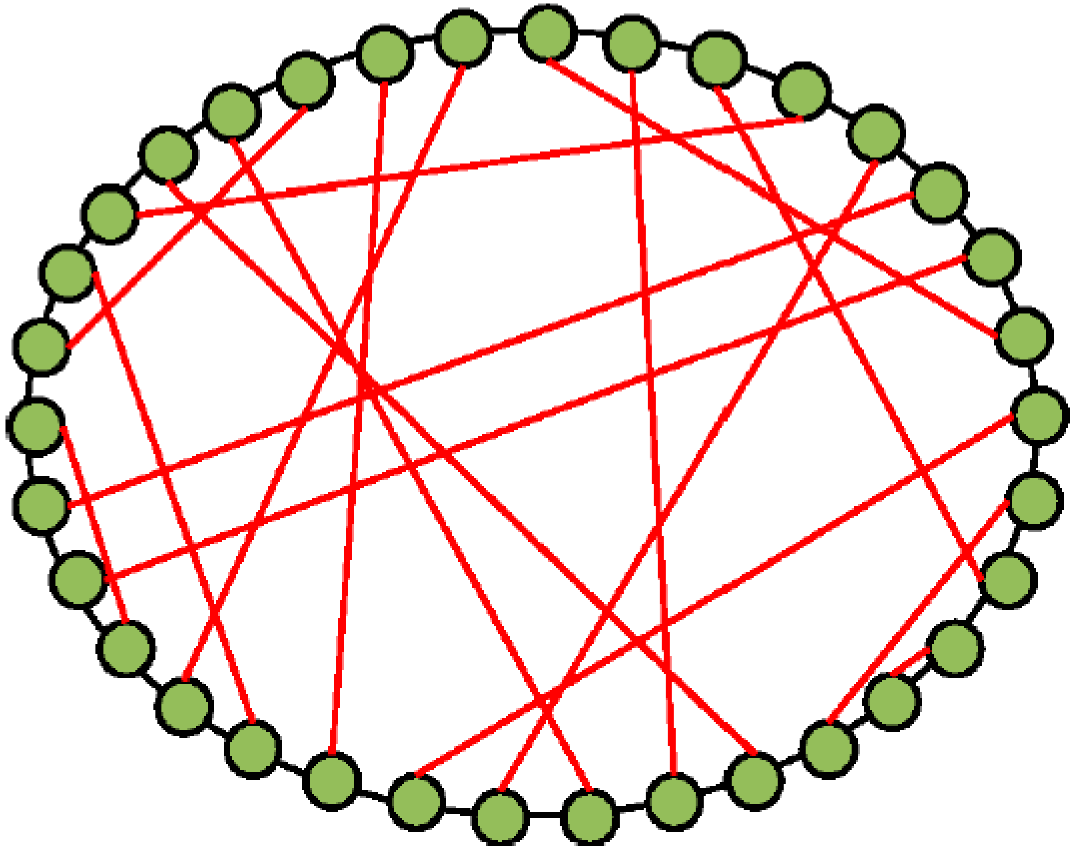


- Per p=0, la rete risultante è completamente regolare, con un coefficente di clusterizzazione di circa $\frac{3}{4}$ per valori grandi di k ed un diametro è O(n)

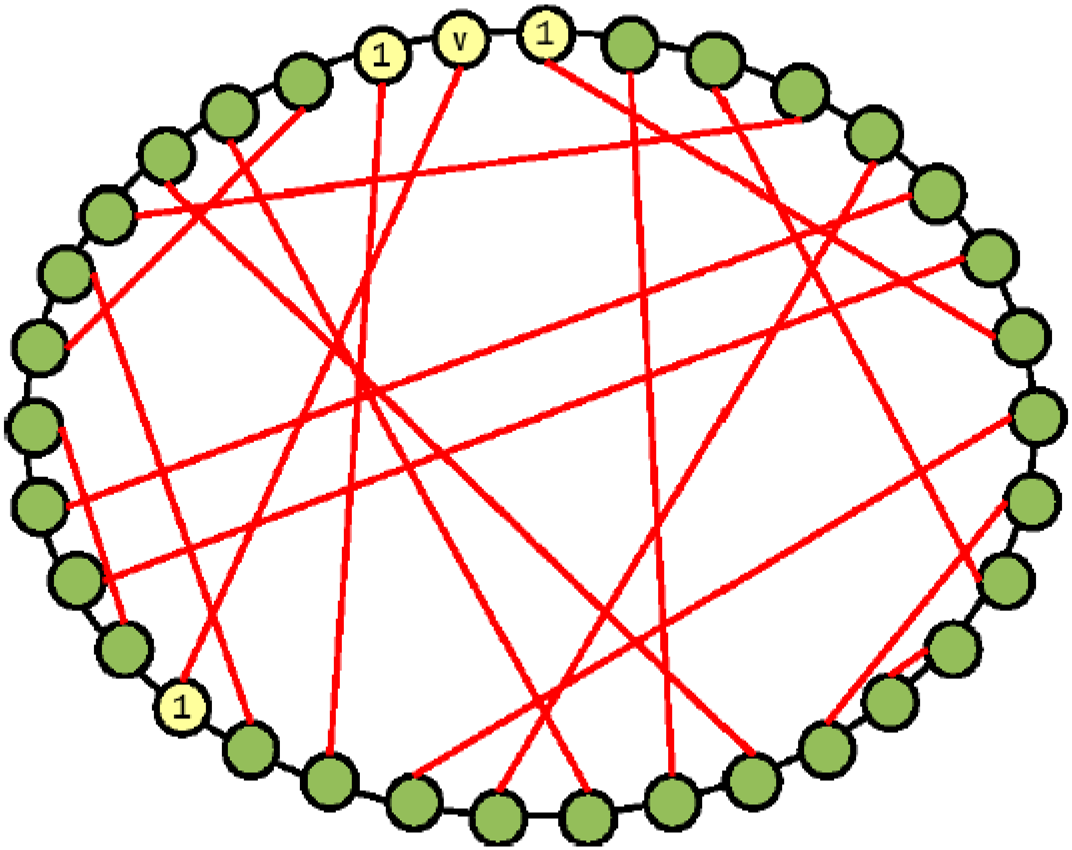
- Per p=1, la rete risultante si può considerare un grafo random con un coefficente di clusterizzazione pari a p ed un diametro O(log n)

- Casi interessanti: valori intermedi di p

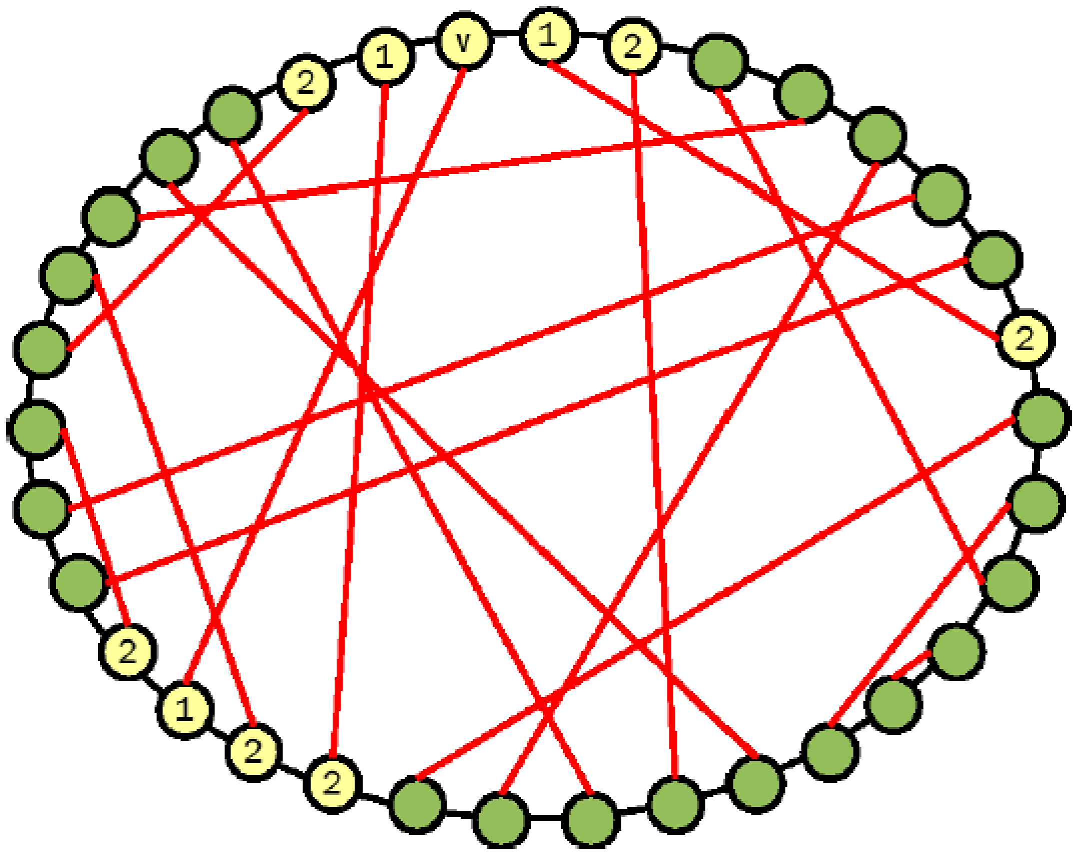
IL MODELLO DI WATTS-STROGATZ



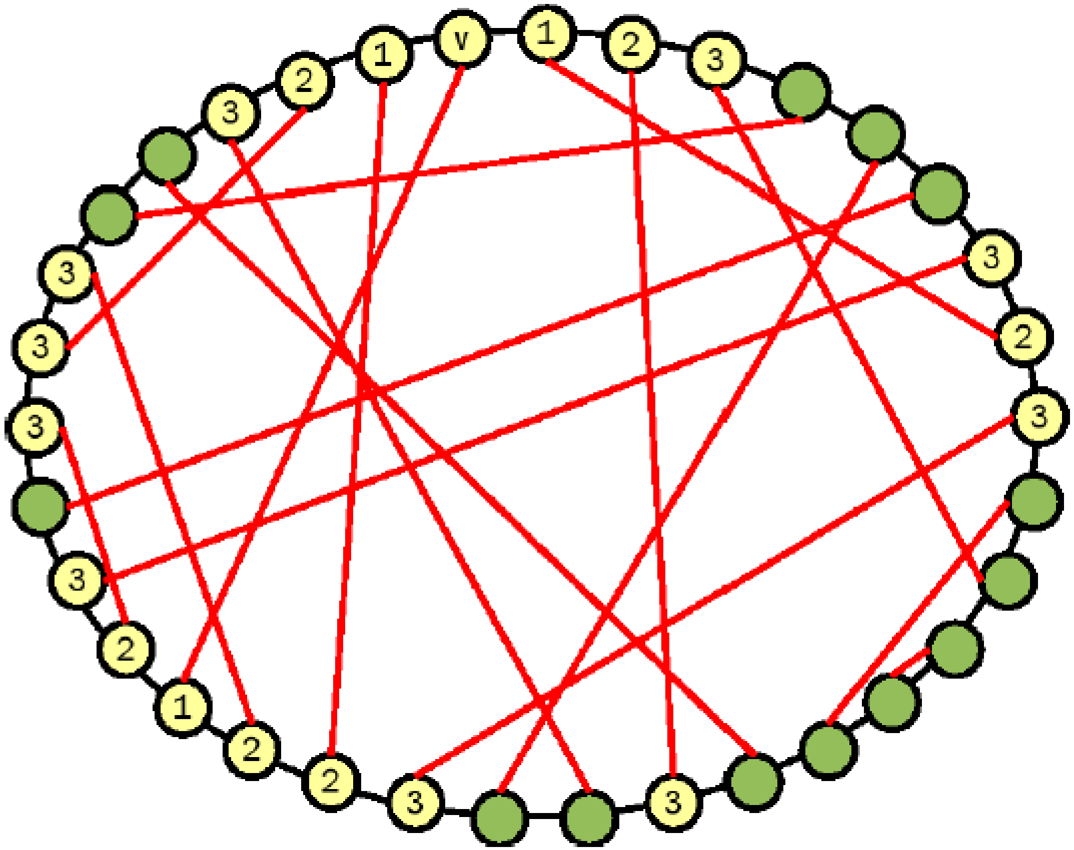
IL MODELLO DI WATTS TROGATZ



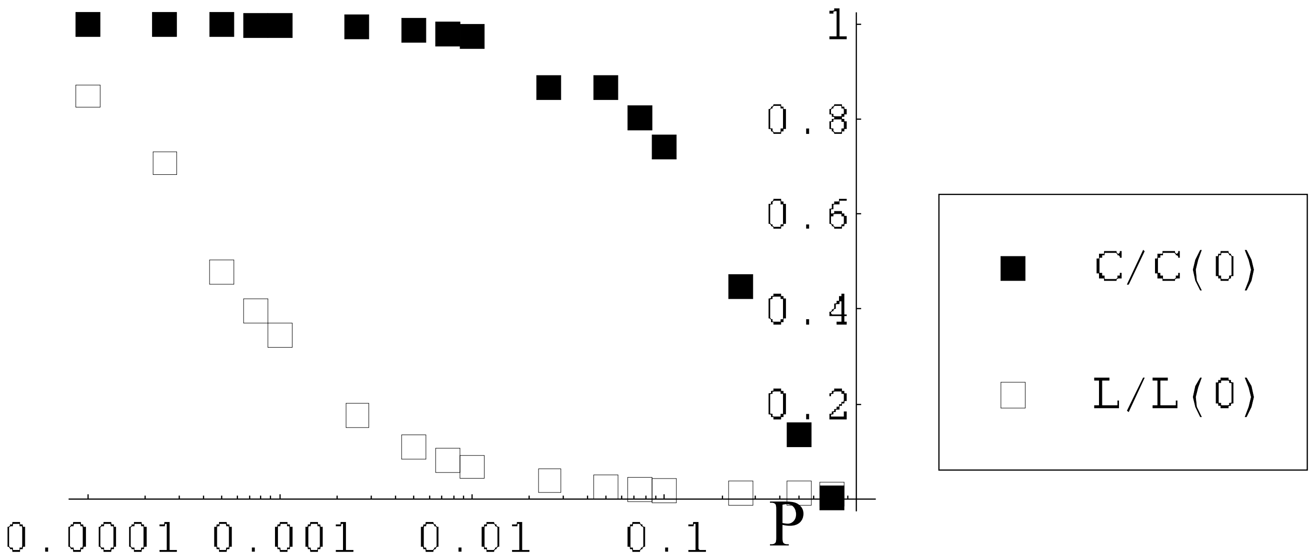
IL MODELLO DI WATTS STROGATZ



IL MODELLO DI WATT STROGATZ



IL MODELLO DI WATTS-STROGATZ



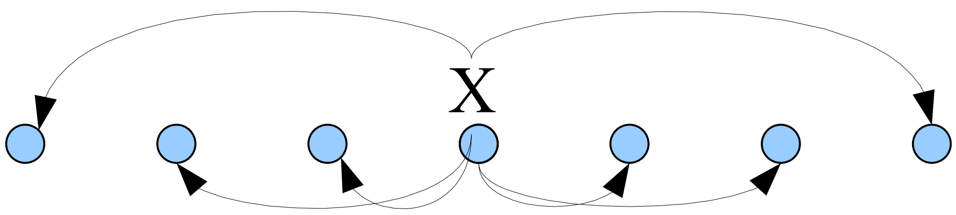
- Il diagramma mostra il coefficente di clusterizzazione e la distanza media in funzione della probabilità p. (Normalizzata dai valori ottenuti per p=0.)
- Risultato: il coefficente di clusterizzazione è alto per valori piccoli di p ma la lunghezza media della distanza decresce rapidamente
- Small World networks combinano un alto coefficente di clusterizzazione con un valore piccolo della distanza media.

IL MODELLO DI WATTS STROGATZ

Compito per casa:

Dimostrare che il coefficiente di clusterizzazione per una rete regolare (alla Watts Strogatz senza archi random) di N nodi in cui ogni nodo è connesso ai suoi k vicini è il seguente

$$C = 3(K-2)\,/\,4(K-1)$$



Si consideri il nodo X, ha collegamenti con k nodi vicini

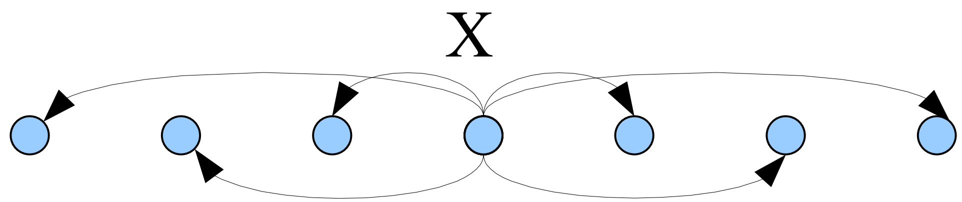
- Ci sono k/2 nodi da ogni lato di X
- Ogni nodo ha un link con un altro nodo che si trova dallo stesso lato, rispetto ad X
- Il numero totale di link tra nodi a destra (o a sinistra) di X è $k/2(k/2-1)/2$

IL MODELLO DI WATTS STROGATZ

Compito per casa:

Dimostrare che il coefficiente di clusterizzazione per una rete regolare (alla Watts Strogatz) di N nodi in cui ogni nodo è connesso ai suoi k vicini è il seguente

$$C = 3(K-2) / 4(K-1)$$



Inoltre ci sono i collegamenti tra i nodi a destra di X con quelli a sinistra di X

- Questi collegamenti sono 1 per il nodo più distante da X + 2 per quello successivo+3+ ......+k/2 per il nodo più vicino ad X. In totale quindi

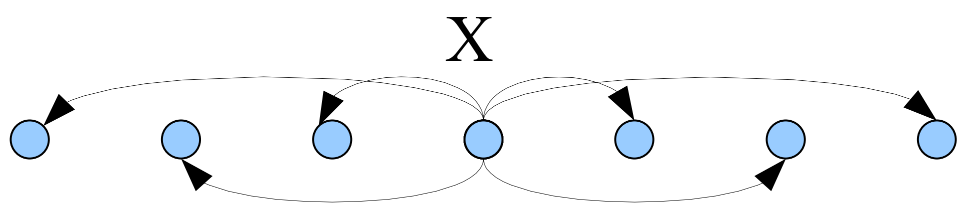
$$k/2(k/2-1)/2$$

IL MODELLO DI WATTS STROGATZ

Compito per casa:

Dimostrare che il coefficiente di clusterizzazione per una rete regolare (alla Watts Strogatz) di N nodi in cui ogni nodo è connesso ai suoi k vicini è il seguente

$$C = 3(K-2)/4(K-1)$$



- In totale tra i vicini di X ci sono $3k/2(k/2-1)/2$ links
- il numero totale di collegamenti possibili tra i vicini di X è $k(k-1)/2$
- da cui si ottiene $3k/2(k/2-1)/2 \,/\, k(k-1)/2 = 3(k-2)/4(k-1)$