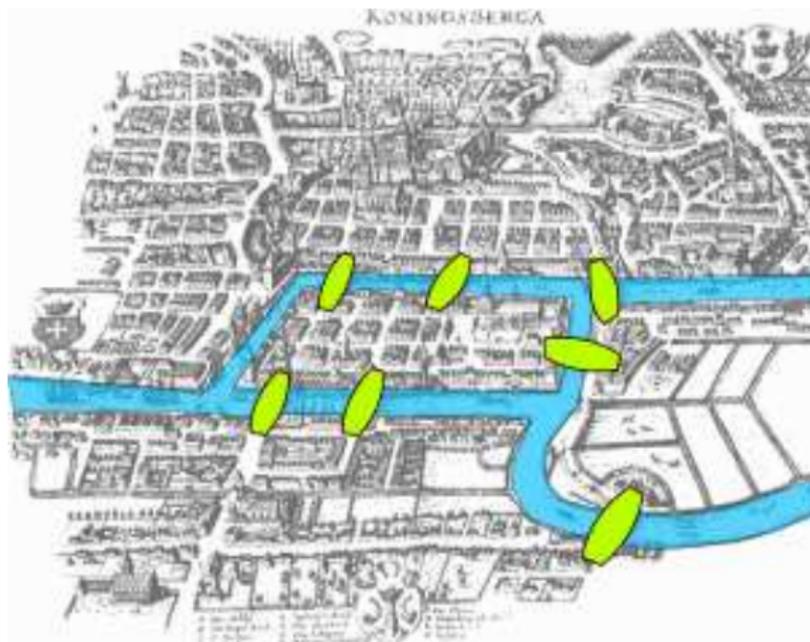


Dai ponti di Königsberg al postino cinese

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica
Largo B. Pontecorvo 3, Pisa
mpassacantando@di.unipi.it

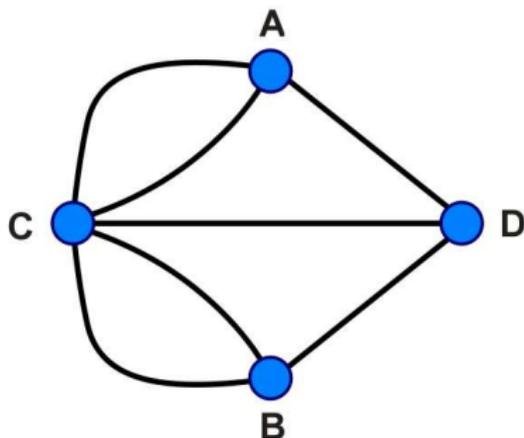
Il problema dei 7 ponti di Königsberg



È possibile attraversare tutti i ponti una sola volta e tornare al punto di partenza?

Il problema dei 7 ponti di Königsberg

Formulazione su multigrafo (Eulero 1736):



Esiste un ciclo che passa su tutti gli archi una sola volta?
(Un tale ciclo è detto ciclo euleriano).

Definizione

Il **grado** di un nodo è il numero di archi incidenti nel nodo.

Teorema

Sia G un multigrafo non orientato e connesso.

In G esiste un ciclo euleriano \iff tutti i nodi di G hanno grado pari.

Il problema del ciclo euleriano

Dimostrazione del Teorema

\Rightarrow : Sia C un ciclo euleriano. Allora C contiene tutti gli archi del grafo. Percorrendo C si entra e si esce da ogni nodo lo stesso numero di volte, quindi ogni nodo ha grado pari.

\Leftarrow Dim. per induzione sul numero di archi.

Se G ha 3 nodi e 3 archi è ovvio.

Supponiamo che G abbia $k + 1$ archi.

Ipotesi induttiva: se H è un multigrafo connesso con numero archi $\leq k$ e ogni nodo ha grado pari, allora in H esiste un ciclo euleriano.

Poiché G è connesso e i nodi hanno grado pari, esiste un ciclo C .

Rimuoviamo gli archi di C e otteniamo grafo G' .

Tutti i nodi di G' hanno ancora grado pari.

G' contiene componenti connesse G'_1, G'_2, \dots . Ogni componente connessa G'_i ha al più k archi e tutti i suoi nodi hanno grado pari. Per ipotesi induttiva G'_i ha ciclo euleriano C_i .

Costruiamo ora un ciclo euleriano in G . Partiamo da nodo $a \in C$. Passiamo sugli archi di C finché arriviamo ad un nodo $v_i \in G'_i$. Passiamo sugli archi di C_i e torniamo a v_i .

Continuando così torneremo al nodo a avendo visitato ogni arco una sola volta. \square

Problema

Quando tutti i nodi di G hanno grado pari, **come si trova** un ciclo euleriano?

vedi: <http://neamar.fr/Res/Icosien/>

Definizione

In un grafo connesso G un arco a è chiamato **ponte** se il grafo $G \setminus \{a\}$ non è connesso.

Definizione

In un grafo connesso G un arco a è chiamato **ponte** se il grafo $G \setminus \{a\}$ non è connesso.

Algoritmo di Fleury

1. Scegli un nodo i , poni $u := i$ (nodo corrente), $C := u$ (sequenza di nodi)
2. Scegli un arco $a = \{u, j\}$ incidente in u , ma **scegliendo un ponte solo se non ci sono alternative**
3. Aggiungi j in coda a C e poni $u := j$
4. Elimina a dal grafo e cancella i nodi isolati
5. Se il grafo è vuoto allora STOP
altrimenti torna al passo 2.

Problema del postino (cinese)

Un postino deve consegnare la posta in ogni strada della zona di sua competenza, partendo e terminando dalla sede dell'ufficio postale. Qual è l'itinerario più breve?

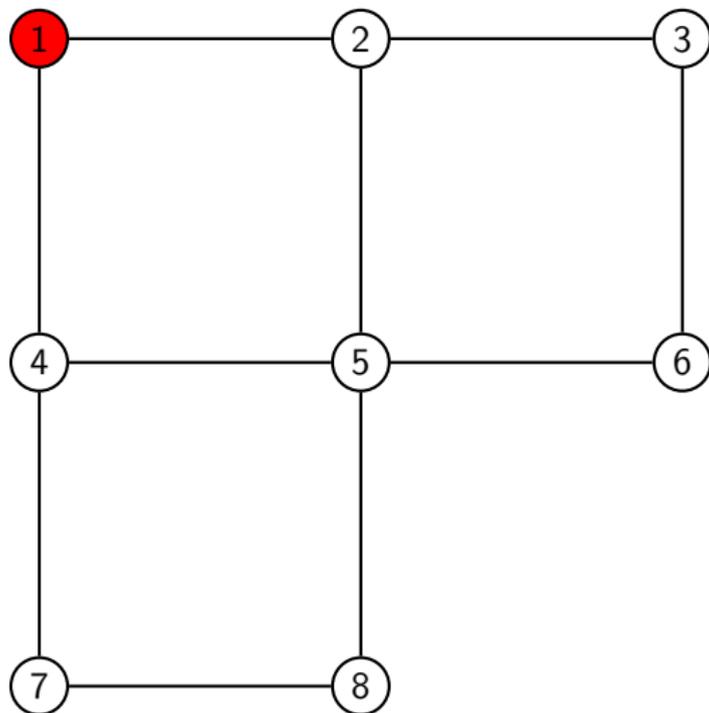
Problema

Dato un grafo connesso, trovare un ciclo di costo minimo che attraversa tutti gli archi almeno una volta.

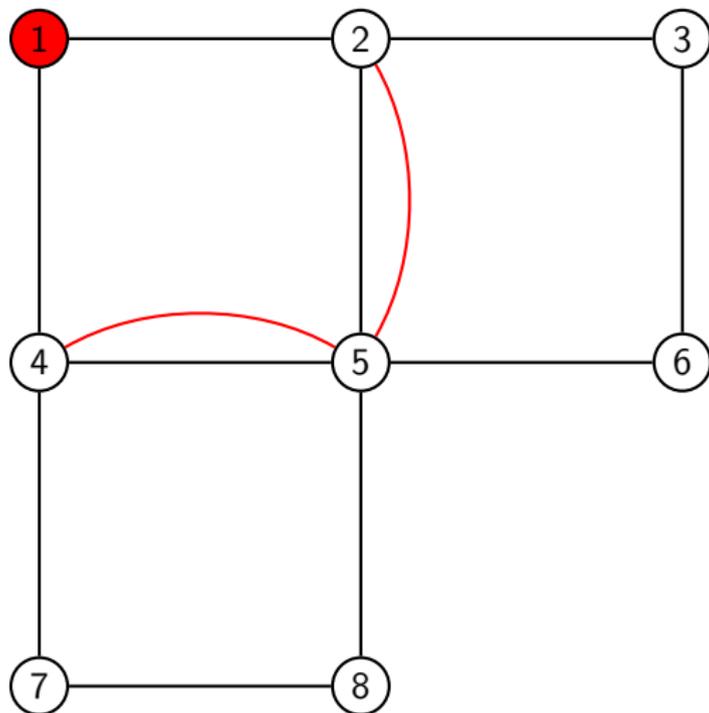
Se nel grafo esistono cicli euleriani, allora un qualunque ciclo euleriano risolve il problema del postino cinese.

E se non esistono cicli euleriani?

Problema del postino (cinese)



Problema del postino (cinese)



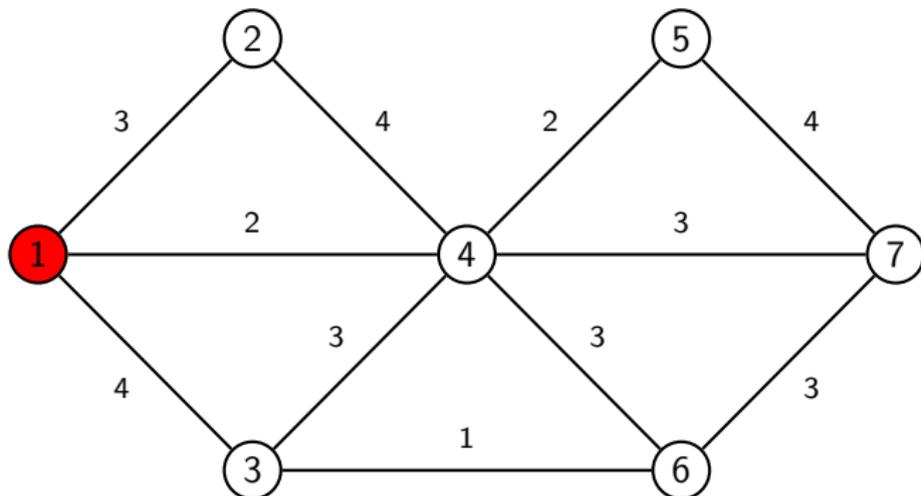
Problema del postino (cinese)

In un grafo ci possono essere 3 nodi di grado dispari?

Più in generale, è possibile che i nodi di grado dispari siano in numero dispari?

Perché?

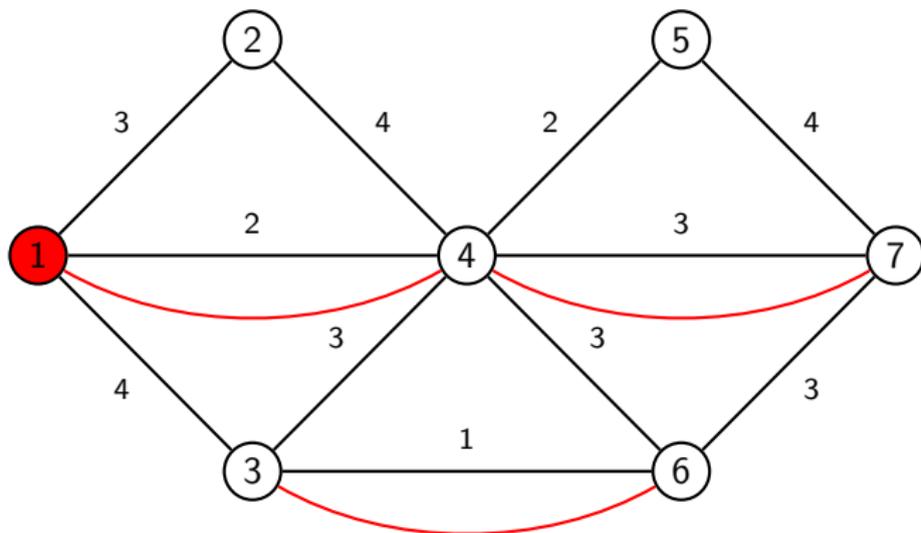
Problema del postino (cinese)



Quali sono i nodi di grado dispari?

Quali archi dobbiamo attraversare più di una volta?

Problema del postino (cinese)



Quali sono i nodi di grado dispari?

Quali archi dobbiamo attraversare più di una volta?