RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) La nuova rete stradale del *Regno di Trinacria* che collega le n città dell'isola è stata appena inaugurata. La rete stradale è costituita da m tratte ed il pedaggio della tratta (i, j), che collega le città i e j con un tempo di percorrrenza t_{ij}, è stato fissato a s_{ij} pierreali.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di spostarsi dalla raggiante città di *Katane* alla splendente città di *Zyz* sulla rete stradale in modo da minimizzare il tempo totale di percorrenza ma spendendo al più K pierreali.

SVOLGIMENTO

Si consideri il grafo $G = (N, A)$ i cui n nodi rappresentano le città e gli m archi le tratte stradali. Katane sia situata nel nodo $k \in N$ e Zyz nel nodo $z \in N$. I possibili percorsi dalla prima alla seconda sono individuati dai cammini da k a z sul grafo G. Per descrivere un generico cammino si introducano le seguenti variabili binarie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se si utilizza l'arco } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ciascun arco $(i, j) \in A$. Utilizzando queste variabili, un cammino da k a z è individuato dall'invio di un'unità di flusso dal nodo k al nodo z, ed può pertanto essere caratterizzato tramite i vincoli di conservazione del flusso:

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad \text{con} \quad b_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i = k \\ 1 & \text{se } i = z \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N.$$

Il costo complessivo delle tratte attraversate dal cammino risulta essere

$$\sum_{(i,j)\in A} s_{ij} x_{ij}.$$

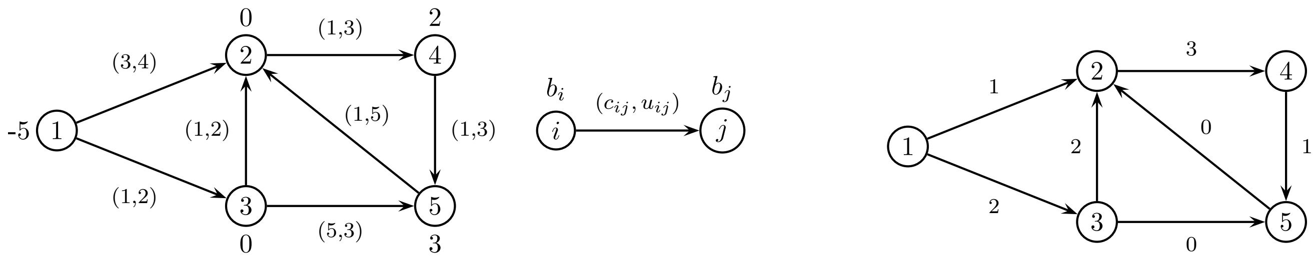
Analogamente, il tempo totale di percorrenza richiesto dal cammino risulta essere

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}.$$

Pertanto, il problema in esame può essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = b_i & i \in N \\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} s_{ij} x_{ij} \le K & \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & (i,j) \in A.
\end{array}$$

2) Si consideri il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra.

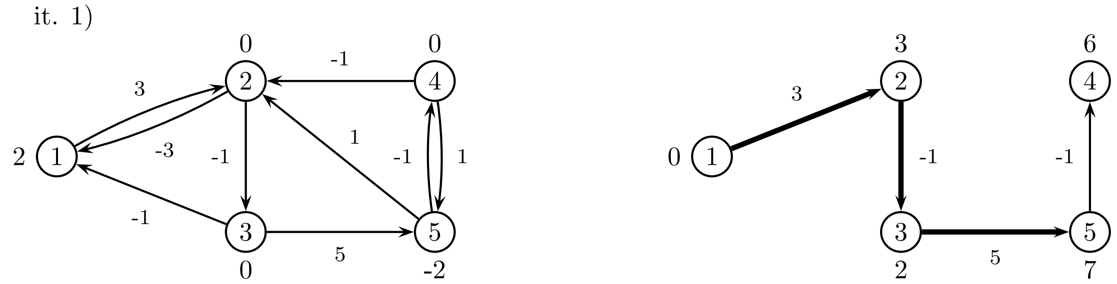


Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo dei cammini minimi successivi a partire dallo pseudoflusso minimale riportato sul grafo a destra. Ad ogni iterazione si forniscano l'albero dei cammini minimi con le relative etichette, il cammino aumentante selezionato con la quantità di flusso inviata, lo pseudoflusso ottenuto con il suo costo, i relativi sbilanciamenti dei nodi e lo sbilanciamento complessivo. Al termine si fornisca la soluzione ottima trovata. Infine, si modifichi il costo di almeno due archi in modo tale che la soluzione trovata rimanga comunque un flusso di costo minimo, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

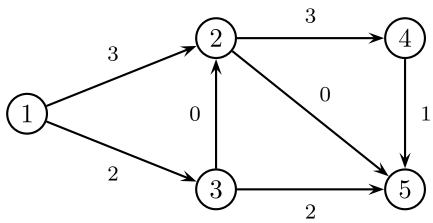
Lo pseudoflusso dato x ha costo 11 con vettore degli sbilanciamenti $e_x = (2, 0, 0, 0, -2)$ e sbilanciamento complessivo $g(x) = 2$. Per ogni iterazione viene riportato il grafo residuo (con costi degli archi e sbilanciamento dei nodi), l'albero dei cammini minimi individuato, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P selezionato. Viene inoltre riportato lo pseudoflusso ottenuto in seguito all'invio di θ unità di flusso lungo P.

it. 1)

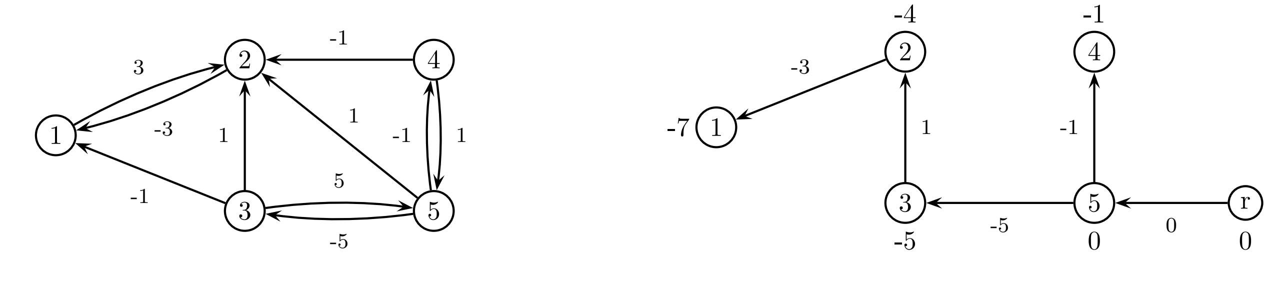


$\theta = 2$

$C(P) = 7$

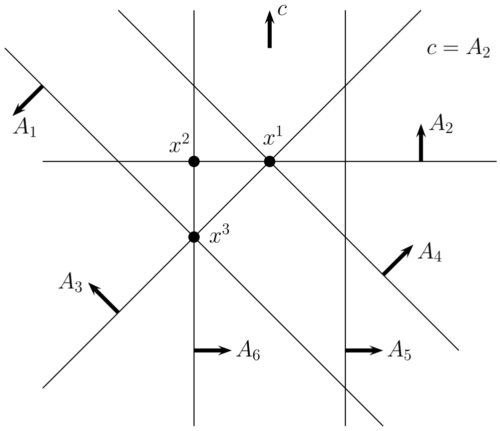


Poiché lo sbilanciamento complessivo risulta nullo, lo pseudoflusso in figura di costo $cx + \theta C(P) = 11 + 2 \cdot 7 = 25$ è ammissibile e pertanto è un flusso di costo minimo. Come ulteriore verifica della sua ottimalità, si può osservare che il grafo residuo associato (riportato qua sotto a sinistra) non contiene cicli di costo negativo. Infatti, l'albero riportato a destra costituisce il corrispondente albero dei cammini minimi di radice fittizia r.



Modificando i costi degli archi $(2, 4)$ e $(5, 2)$ in $c_{24} = c_{52} = 2$, l'albero continua ad essere un albero di cammini minimi e conseguentemente il flusso rimane di costo minimo.

3) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Successivamente, si consideri il caso in cui $c = A_1$: la soluzione ottima trovata in precedenza resta tale? Giustificare le risposte.

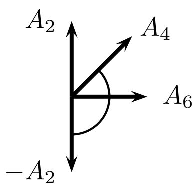


SVOLGIMENTO

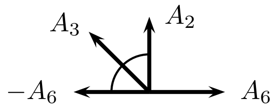
it. 1) $B = \{2, 4\}$, x^1 viola il vincolo 6 da cui $k = 6$, $y_2 = 1$, $y_4 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_4 = 0$) e primale degenere ($I(x^1) = \{2, 3, 4\}$). Poiché $A_6 \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(-A_2, A_4)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_2 < 0$, $\eta_4 > 0$ e quindi $h = 4$.

it. 2) $B = \{2, 6\}$, x^2 viola il vincolo 3 da cui $k = 3$, $y_2 = 1$, $y_6 = 0$ in quanto $c = A_2$. La base è duale degenere ($y_6 = 0$), ma primale non degenere ($I(x^2) = B$). Poiché $A_3 \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(A_2, -A_6)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_2 > 0$, $\eta_6 < 0$ e quindi $h = 2$.

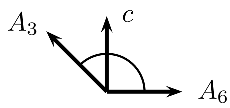
it. 3) $B = \{3, 6\}$, x^3 è una soluzione ammissibile per il problema primale e quindi ottima. La base è primale degenere ($I(x^3) = \{1, 3, 6\}$), ma duale non degenere in quanto $c \in \operatorname{int}\operatorname{cono}(A_3, A_6)$, come mostrato in figura (c), e conseguentemente $y_3 > 0$ e $y_6 > 0$.



(a)

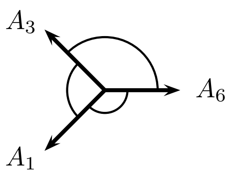


(b)



(c)

Scegliendo $c = A_1$, x^3 è ancora una soluzione ottima in quanto $I(x^3) = \{1, 3, 6\}$ garantisce $c \in \operatorname{cono}(A_1, A_3, A_6)$. Poiché $\operatorname{cono}(A_1, A_3, A_6) = \operatorname{cono}(A_1, A_3) \cup \operatorname{cono}(A_3, A_6) \cup \operatorname{cono}(A_6, A_1) = \mathbb{R}^2$ (figura (d)), in realtà x^3 è soluzione ottima per qualsiasi vettore c dei coefficienti della funzione obiettivo, ed in effetti x^3 è l'unica soluzione ammissibile del problema.



(d)

4) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{array}{lcccccccl} \max & 23x_1 & + & 12x_2 & + & 21x_3 & + & 15x_4 & \\ & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \in \{0,1\} \end{array}$$

Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

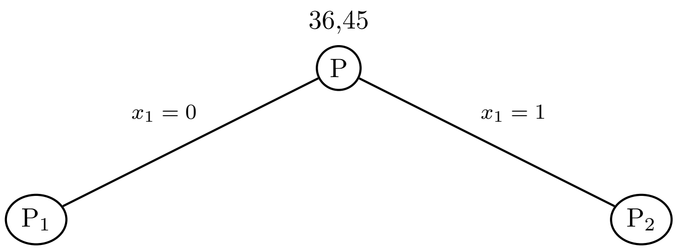
SVOLGIMENTO

I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 sono rispettivamente $23/5 = 4.6$, $12/4 = 3$, $21/3 = 7$ e $15/2 = 7.5$.

Per applicare l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_4, x_3, x_1, x_2: la soluzione ammissibile ottenuta è $x = (0, 0, 1, 1)$ di valore 36 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 36$.

Analizzando le variabili nello stesso ordine, si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo che è $(2/5, 0, 1, 1)$ di valore 45.2 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = \lfloor 45.2 \rfloor = 45$.

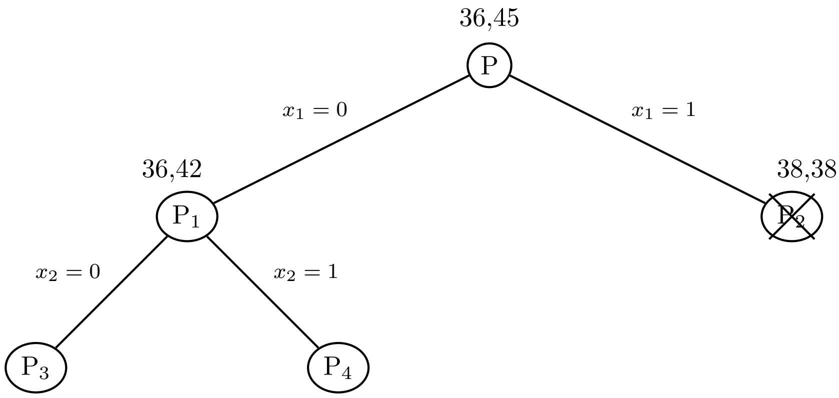
Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione istanziando la variabile x_1:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_1$ è $(0, 1/2, 1, 1)$ di valore $42 = v_S(P_1)$. Poiché $v_S(P_1) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta non è ammissibile, il nodo P$_1$ rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_2$ è $(1, 0, 0, 1)$ di valore $38 = v_S(P_2)$. Poiché $v_S(P_2) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta è ammissibile, possiamo chiudere il nodo P$_2$ e aggiornare $v_I(P) = 38$.

Dal nodo P$_1$ istanziamo la variabile x_2:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_3$ è $(0, 0, 1, 1)$ di valore $36 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) < v_I(P) = 38$, possiamo chiudere il nodo P$_3$.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_4$ è $(0, 1, 1/3, 1)$ di valore $34 = v_S(P_4)$. Poiché $v_S(P_4) < v_I(P) = 38$, possiamo chiudere anche il nodo P$_4$ e l'algoritmo si ferma.

La soluzione ottima del problema dello zaino è pertanto $(1, 0, 0, 1)$ di valore 38.