RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) Gli n partecipanti di un convegno medico alle Maldive devono essere portati in gita presso un'isola dell'arcipelago. Per il trasferimento sono disponibili m barche. Sia u_j il massimo numero di passeggeri imbarcabili sulla barca j. Le imbarcazioni a disposizione differiscono non solo in termini di capacità, ma anche come servizi offerti a bordo. Ogni partecipante segnala quindi su quali barche gradirebbe essere imbarcato. Noto il peso p_i di ciascun partecipante i, per garantire un'equa distribuzione del carico, l'organizzatore del tour decide di ripartire i partecipanti tra le barche in modo che la differenza di carico tra le imbarcazioni non ecceda il 20%, considerando come carico di una barca esclusivamente il peso dei passeggeri imbarcati.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di ripartire i partecipanti tra le barche, rispettando le loro preferenze e soddisfacendo i vincoli di capacità e di distribuzione del carico, in modo da minimizzare il numero di barche utilizzate *(suggerimento: utilizzare una matrice di dati per rappresentare le preferenze dei partecipanti)*.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili logiche

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il conferenziere } i \text{ viene imbarcato sulla barca } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se la barca } j \text{ viene utilizzata} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, m$$

e la seguente matrice di dati per esprimere le preferenze dei conferenzieri

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il conferenziere } i \text{ gradisce la barca } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m.$$

Per garantire che ogni conferenziere sia imbarcato rispettando le preferenze espresse, introduciamo i seguenti vincoli di semiassegnamento:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per garantire che il numero di passeggeri imbarcati su ogni barca non ecceda il limite associato all'imbarcazione stessa, introduciamo i seguenti vincoli di capacità:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le u_j y_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

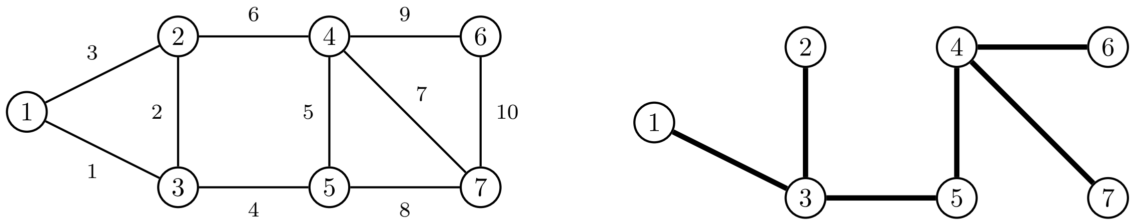
Per garantire che la differenza di carico tra le imbarcazioni non ecceda il 20%, definiamo due variabili ausiliarie v e z ed introduciamo i vincoli

$$v \le \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij}, \quad j = 1, \dots, m, \qquad z \ge \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij}, \quad j = 1, \dots, m, \qquad z - v \le 0.2\, v,$$

cosicché la differenza di carico tra due imbarcazioni qualunque sia al più del 20%.
La formulazione del problema è quindi:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, n \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le u_j y_j & j = 1, \dots, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij} \ge v & j = 1, \dots, m \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_{ij} \le z & j = 1, \dots, m \\
& z \le 1.2\, v & \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m, \\
& y_j \in \{0, 1\} & j = 1, \dots, m.
\end{array}$$

2) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:



Dire se l'albero a destra è un albero di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per cicli. Supponendo che i costi degli archi (5,7) e (1,3) siano rispettivamente α e β, dire per quali valori di α e β lo stesso albero è di costo minimo utilizzando la caratterizzazione dell'ottimalità per tagli. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Per ogni arco (i, j) non appartenente all'albero, la tabella seguente riporta il suo costo c_{ij}, il ciclo C che si crea con la sua aggiunta all'albero, l'insieme C_{ij} degli altri archi del ciclo, i loro costi ed il massimo c_{max} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	C	C_{ij}	costi	c_{max}
$(1,2)$	3	1–2–3–1	$(1,3),(2,3)$	$1,2$	2
$(2,4)$	6	2–3–5-4–2	$(2,3),(3,5),(4,5)$	$2,4,5$	5
$(5,7)$	8	4–5–7–4	$(4,5),(4,7)$	$5,7$	7
$(6,7)$	10	4–6–7–4	$(4,6),(4,7)$	$9,7$	9

L'albero è di costo minimo in quanto c_{ij} è maggiore o uguale al corrispondente c_{max} per ogni arco (i, j) non appartenete all'albero.

Per ogni arco (i, j) dell'albero, la tabella seguente riporta il suo costo c_{ij}, il taglio (N', N'') che si crea con la sua rimozione dall'albero, l'insieme $A_{ij}(N', N'')$ degli altri archi nel taglio, i loro costi ed il minimo c_{min} di tali costi.

(i,j)	c_{ij}	(N',N'')	$A_{ij}(N',N'')$	costi	c_{min}
$(1,3)$	β	$(\{1\},\{2,3,4,5,6,7\})$	$(1,2)$	3	3
$(2,3)$	2	$(\{2\},\{1,3,4,5,6,7\})$	$(1,2),(2,4)$	$3,6$	3
$(3,5)$	4	$(\{1,2,3\},\{4,5,6,7\})$	$(2,4)$	6	6
$(4,5)$	5	$(\{1,2,3,5\},\{4,6,7\})$	$(2,4),(5,7)$	$6,\alpha$	$\min\{6,\alpha\}$
$(4,6)$	9	$(\{1,2,3,4,5,7\},\{6\})$	$(6,7)$	10	10
$(4,7)$	7	$(\{1,2,3,4,5,6\},\{7\})$	$(5,7),(6,7)$	$\alpha,10$	$\min\{\alpha,10\}$

L'albero è di costo minimo se e solo se c_{ij} è minore o uguale al corrispondente c_{min} per ogni arco (i, j) dell'albero. Pertanto, l'albero è di costo minimo se e solo se $\beta \leq 3$ e $\alpha \geq 7$.

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & & & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 4 \end{array}$$

Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2,3\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante. Si discuta infine l'eventuale degenerazione delle soluzioni ottime primale e duale individuate. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{2,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, $y^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$h = \min\{i \in B : \ y_i < 0\} = \min\{2\} = 2$,

direzione di crescita $W^h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_N W^h = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

passo $\theta = \min \left\{ \dfrac{b_i - A_i x}{A_i W^h} : \ A_i W^h > 0 \right\} = \min\{0/1\} = 0$, $k = 4$ [cambio di base degenere]

it.2) $B = \{3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$y_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, $y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$h = \min\{i \in B : \ y_i < 0\} = \min\{3\} = 3$,

direzione di crescita $W^h = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A_N W^h = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, STOP.

Poiché $A_N W^h \leq 0$, il problema primale è superiormente illimitato e quindi il problema duale è vuoto.

4) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\max & 22x_1 & + & 19x_2 & + & 12x_3 & + & 21x_4 & \\
 & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq 8 \\
\end{array}
$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \in \{0, 1\}$$

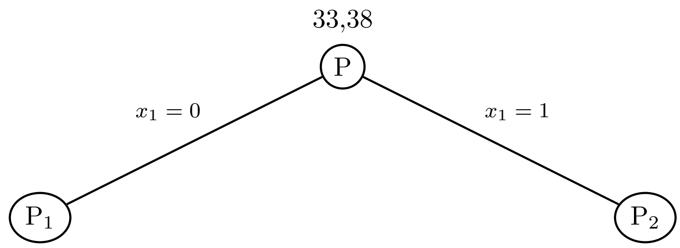
Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti, la valutazione superiore per il problema e per ogni sottoproblema è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

SVOLGIMENTO

I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 sono rispettivamente $22/5 = 4.4$, $19/7 = 2.7$, $12/3 = 4$ e $21/4 = 5.25$. Per applicare l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_4, x_1, x_3, x_2: la soluzione ammissibile ottenuta è $x = (0, 0, 1, 1)$ di valore 33 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 33$.

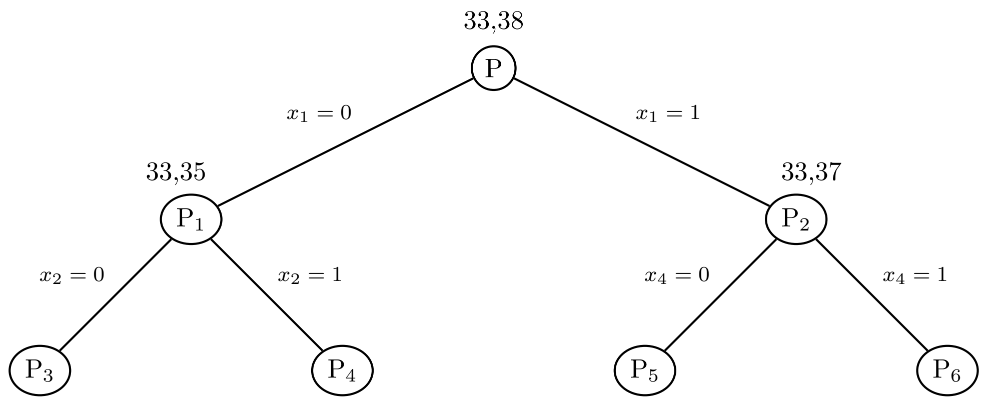
Analizzando le variabili nello stesso ordine, si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo che è $(4/5, 0, 0, 1)$ di valore 38.6 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = \lfloor 38.6 \rfloor = 38$.

Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione istanziando la variabile x_1:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_1$ è $(0, 1/7, 1, 1)$ di valore $35 = v_S(P_1)$. Poiché $v_S(P_1) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta non è ammissibile, il nodo P$_1$ rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_2$ è $(1, 0, 0, 3/4)$ di valore $37 = v_S(P_2) > v_I(P)$, pertanto anche il nodo P$_2$ rimane aperto.



Dal nodo P$_1$ istanziamo la variabile x_2. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_3$ è $(0, 0, 1, 1)$ di valore $33 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P$_3$. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_4$ è $(0, 1, 0, 1/4)$ di valore $24 = v_S(P_4)$. Poiché $v_S(P_4) < v_I(P)$, possiamo chiudere anche il nodo P$_4$.

Dal nodo P$_2$ istanziamo la variabile x_4. La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_5$ è $(1, 0, 1, 0)$ di valore $34 = v_S(P_5)$. Poiché $v_S(P_5) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta è ammissibile, possiamo chiudere il nodo P$_5$ e aggiornare $v_I(P) = 34$. Il problema P$_6$ non ha soluzioni ammissibili a causa dei vincoli $x_1 = 1$ e $x_4 = 1$ fissati, pertanto possiamo chiudere anche il nodo P$_6$ e l'algoritmo si ferma.

La soluzione ottima del problema dello zaino è pertanto $(1, 0, 1, 0)$ di valore 34.