RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome Cognome:

Corso: A B **Matricola:**

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 2\alpha x_1 & - & \beta x_2 & & \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 4
\end{array}
$$

Utilizzando il teorema degli scarti complementari, si individuino tutte le coppie di valori dei parametri α e β per cui la soluzione $\bar{x} = (-1, 0)$ è ottima. Scelti $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è:

$$
(D) \quad
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & & & 2y_2 & + & 2y_3 & + & 2y_4 & + & 4y_5 & & \\
 & & - & 2y_2 & - & y_3 & & & + & y_5 & = & 2\alpha \\
 & -y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & -\beta \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (-1, 0)$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1, 2\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\bar{y}$ (per cui $\bar{y}A = c$) che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_3 = \bar{y}_4 = \bar{y}_5 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il seguente sistema

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcl}
 & - & 2y_2 & = & 2\alpha \\
-y_1 & + & y_2 & = & -\beta \\
y_1, & & y_2 & \geq & 0.
\end{array}
\right.
$$

Pertanto, devono risultare $\bar{y}_2 = -\alpha$, $\bar{y}_1 = \beta - \alpha$ con $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq \alpha$. Conseguentemente, $\bar{x}$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq \alpha$, nel qual caso $\bar{y} = (\beta - \alpha, \alpha, 0, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D).

Posti $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima di (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{1\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\hat{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_1 - A_1\hat{x} = 0$, ovvero il primo vincolo deve essere attivo e quindi deve risultare $\hat{x}_2 = 0$. Una tale soluzione è ammissibile per (P) se e solo se risolve il sistema

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
-2x_1 & \leq & 2 \\
-x_1 & \leq & 2 \\
x_1 & \leq & 4
\end{array}
\right.
$$

ovvero se e solo se $-1 \leq \hat{x}_1 \leq 4$. L'insieme $X = \{(t, 0) \, : \, -1 \leq t \leq 4\}$ individua tutte le soluzioni primali ammissibili complementari alla soluzione ottima $\bar{y}$ di (D), pertanto costituisce l'insieme delle soluzioni ottime di (P).

2) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & -x_1 & - & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1
\end{array}
$$

Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante. Si discuta infine l'eventuale degenerazione delle soluzioni ottime primale e duale individuate. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3,4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : \ y_i < 0\} = \min\{3\} = 3,$$

$$\text{direzione di crescita } W^h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N W^h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{passo } \theta = \min\left\{ \frac{b_i - A_i x}{A_i W^h} \ : \ A_i W^h > 0 \right\} = \min\{0/1\} = 0, \quad k = 5 \text{ [cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{4,5\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

$B = \{4, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (1, 0)$ è una soluzione ottima per il primale, mentre $\bar{y} = (0, 0, 0, 0, 1)$ è una soluzione ottima per il duale. Le soluzioni sono entrambe degeneri, infatti l'insieme dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$ e $\bar{y}_4 = 0$.

3) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{array}{lccccccccccc} \max & 2x_1 & + & 6x_2 & + & 18x_3 & + & 20x_4 & + & 10x_5 & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & \leq & 9 \\ & \multicolumn{11}{l}{x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5 \in \{0,1\}} \end{array}$$

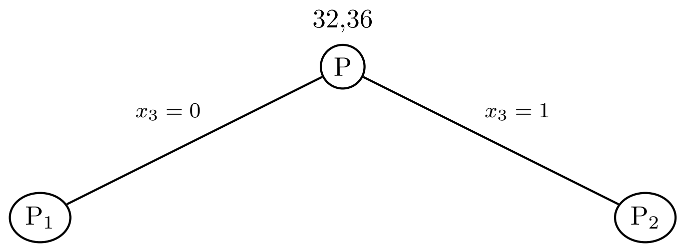
Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti, la valutazione superiore per il problema e per ogni sottoproblema è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

SVOLGIMENTO

I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sono rispettivamente 1, 2, 3, 4 e 5. Per applicare l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_5, x_4, x_3, x_2, x_1: la soluzione ottenuta è $x = (1, 0, 0, 1, 1)$ di valore 32 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 32$.

Analizzando le variabili nello stesso ordine si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo che è $(0, 0, 1/3, 1, 1)$ di valore 36 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 36$.

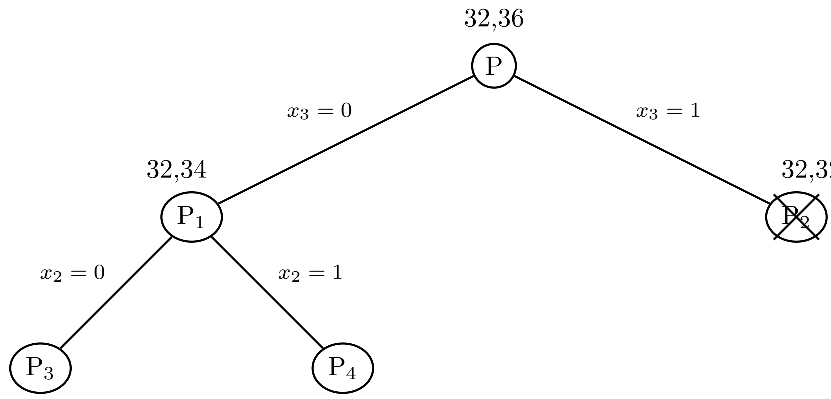
Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione istanziando la variabile x_3:



La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema P$_1$ è $(0, 2/3, 0, 1, 1)$ di valore $34 = v_S(P_1)$. Poiché $v_S(P_1) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta non è ammissibile, il nodo P$_1$ rimane aperto.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_2$ è $(0, 0, 1, 1/5, 1)$ di valore $32 = v_S(P_2)$. Poiché $v_S(P_2) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P$_2$.

Dal nodo P$_1$ istanziamo la variabile x_2:

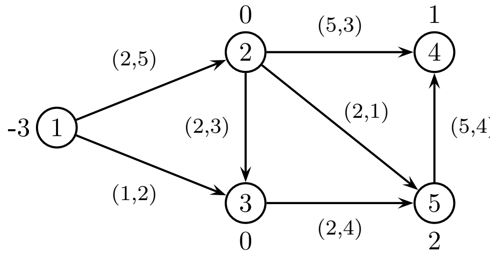


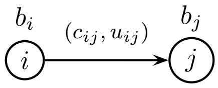
La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_3$ è $(1, 0, 0, 1, 1)$ di valore $32 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P$_3$.

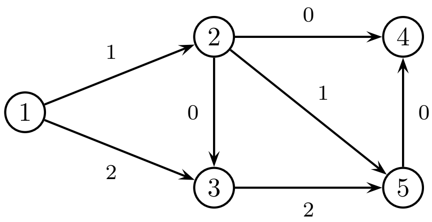
La soluzione ottima del rilassamento continuo di P$_4$ è $(0, 1, 0, 4/5, 1)$ di valore $32 = v_S(P_4)$. Poiché $v_S(P_4) = v_I(P)$, possiamo chiudere anche il nodo P$_4$ e l'algoritmo si ferma.

La soluzione ottima del problema dello zaino è pertanto $(1, 0, 0, 1, 1)$ di valore 32.

4) Si consideri il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra.







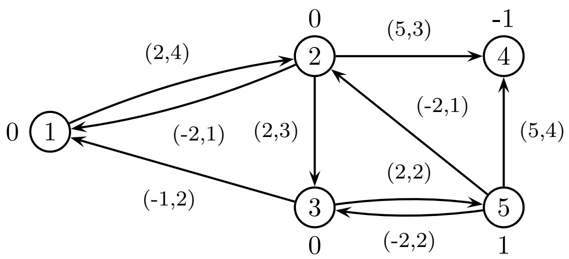
Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo dei cammini minimi successivi a partire dallo pseudoflusso minimale riportato sul grafo a destra. Ad ogni iterazione si forniscano l'albero dei cammini minimi con le relative etichette, il cammino aumentante selezionato con la quantità di flusso inviata, lo pseudoflusso ottenuto con il suo costo, i relativi sbilanciamenti dei nodi e lo sbilanciamento complessivo. Al termine si fornisca la soluzione ottima trovata. Infine, si modifichi il costo di uno o più archi in modo tale che la soluzione trovata non sia più un flusso di costo minimo, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

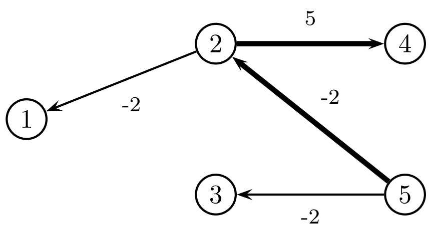
Lo pseudoflusso dato x ha costo 10 con vettore degli sbilanciamenti $e_x = (0, 0, 0, -1, 1)$ e sbilanciamento complessivo $g(x) = 1$. Per ogni iterazione viene riportato il grafo residuo (con costi e capacità residue sugli archi e sbilanciamento sui nodi), l'albero dei cammini minimi individuato, in cui viene evidenziato il cammino aumentante selezionato. Viene inoltre riportato lo pseudoflusso ottenuto in seguito all'invio di δ unità di flusso lungo il cammino aumentante.

Iterazione 1)

Grafo residuo:



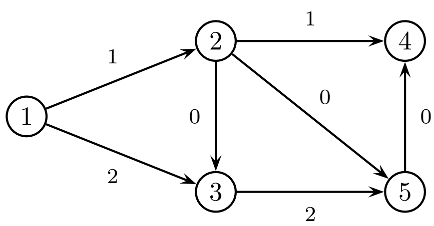
Cammino aumentante:



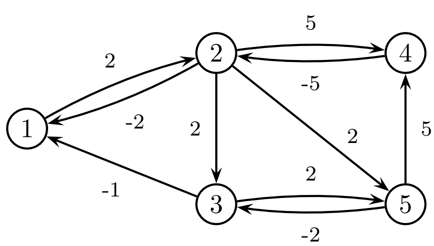
$\delta = 1$

costo cam. aum. $= 3$

Nuovo pseudoflusso:



Poiché lo sbilanciamento complessivo risulta nullo, lo pseudoflusso in figura di costo $10 + 3 = 13$ è ammissibile e pertanto è un flusso di costo minimo. Come ulteriore verifica della sua ottimalità, si può osservare che il grafo residuo associato (in cui sono indicati solo i costi degli archi)



non contiene cicli di costo negativo.

Modificando il costo dell'arco $(2, 5)$ in $c_{25} = -1$, il ciclo 2-5-4-2 diventa di costo negativo, pari a -1, e pertanto il flusso non è più di costo minimo.