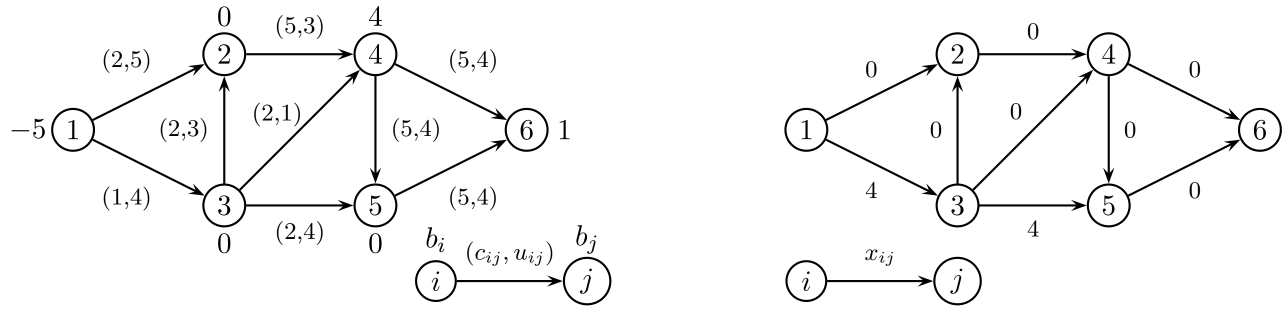
Fac-simile della seconda prova in itinere di Ricerca Operativa – 13/12/2018

Esercizio 1. Si consideri il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra.



Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo dei cammini minimi successivi a partire dallo pseudoflusso minimale riportato sul grafo a destra. Ad ogni iterazione si forniscano l'albero dei cammini minimi con le relative etichette, il cammino aumentante selezionato con la quantità di flusso inviata, lo pseudoflusso ottenuto con il suo costo, i relativi sbilanciamenti dei nodi e lo sbilanciamento complessivo. Al termine si fornisca la soluzione ottima trovata.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema di PL, in cui α e β sono parametri reali:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & \beta x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & \alpha \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 2. \end{array}$$

Si individui l'insieme delle coppie di valori di α e β per cui $\bar{x} = (2, 3)$ è una soluzione ottima del problema. Giustificare la risposta.

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

Si risolva il problema utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica e geometrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il passo θ e l'indice uscente, giustificando le risposte.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \max & 10x_1 & + & 11x_2 & + & 14x_3 & + & 26x_4 & + & 5x_5 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & + & 2x_5 & \leq & 9 \end{array}$$

$$x_1, \;\; x_2, \;\; x_3, \;\; x_4, \;\; x_5 \in \{0, 1\}$$

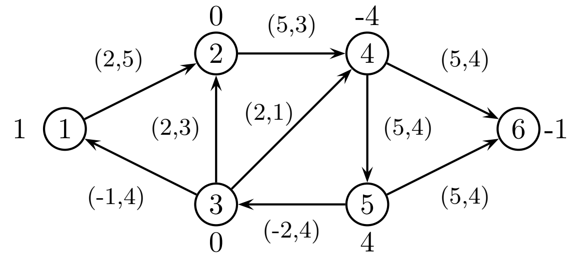
Si individui una soluzione ottima del problema utilizzando il seguente metodo "Branch and Bound: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo "greedy basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

Soluzioni

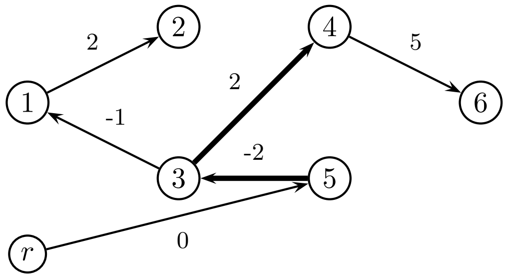
Esercizio 1. Lo pseudoflusso dato x ha costo 12 con vettore degli sbilanciamenti $e_x = (1, 0, 0, -4, 4, -1)$ e sbilanciamento complessivo $g(x) = 5$. Per ogni iterazione viene riportato il grafo residuo (con costi e capacità residue degli archi e sbilanciamento dei nodi), l'albero dei cammini minimi individuato, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P selezionato. Viene inoltre riportato lo pseudoflusso ottenuto in seguito all'invio di δ unità di flusso lungo P.

Iterazione 1):

Grafo residuo:

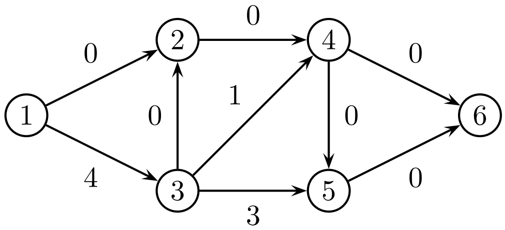


Cammino aumentante:



$\delta = 1$

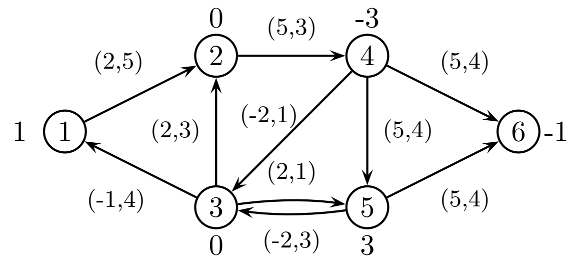
Nuovo pseudoflusso:



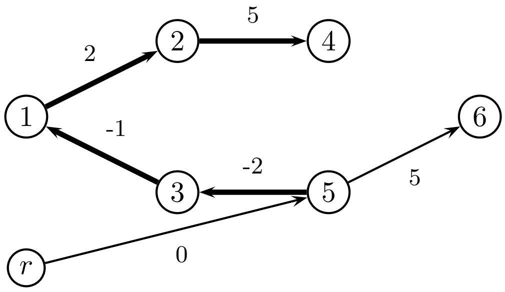
costo = 12

Iterazione 2):

Grafo residuo:

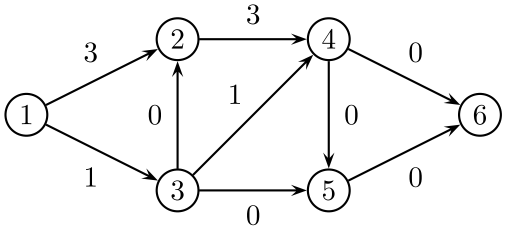


Cammino aumentante:



$\delta = 3$

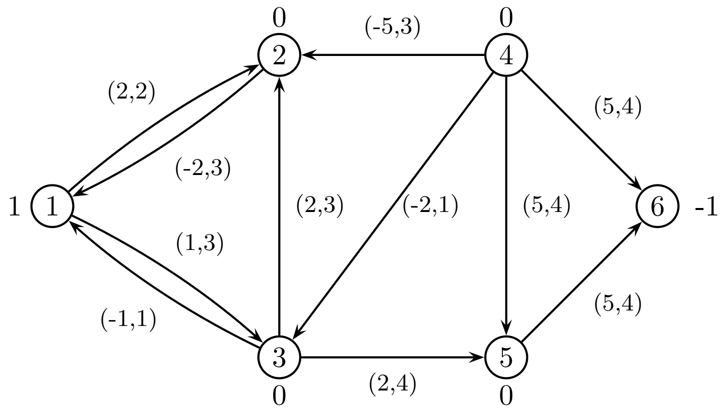
Nuovo pseudoflusso:



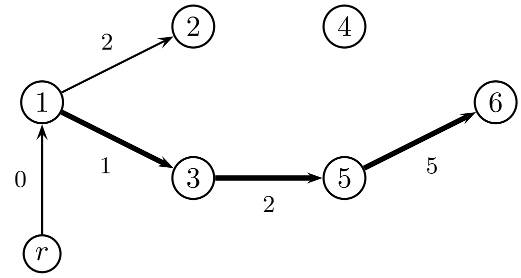
costo $= 24$

Iterazione 3):

Grafo residuo:

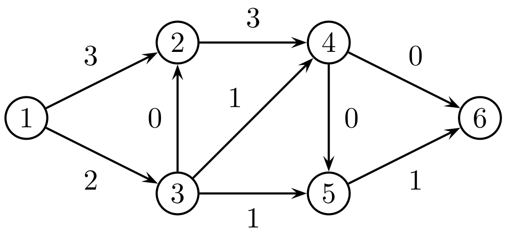


Cammino aumentante:



$\delta = 1$

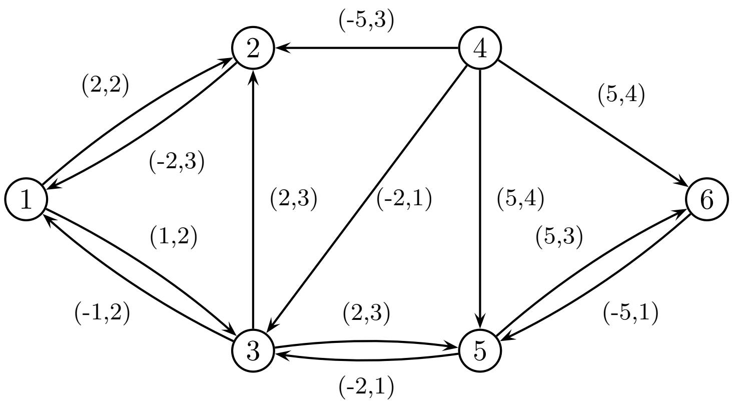
Nuovo pseudoflusso:



costo $= 32$

Poiché lo sbilanciamento complessivo risulta nullo, l'ultimo pseudoflusso trovato è ammissibile e pertanto è un flusso di costo minimo. Come ulteriore verifica della sua ottimalità, si può osservare che non esistono cicli di costo negativo nel grafo residuo associato:

Grafo residuo:



Esercizio 2. Il problema duale è:

$$
(D) \qquad \begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & \alpha y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\
 & -y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & = & \beta \\
 & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & \geq & 0
\end{array}
$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (2,3)$ è ammissibile se e solo se $\alpha \geq -5$.

La soluzione $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione duale ammissibile y che è in scarti complementari con $\bar{x}$. L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1,\ldots,m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{2,4\}$ se $\alpha > -5$ e $I(\bar{x}) = \{1,2,4\}$ se $\alpha = -5$.

Distinguiamo i due casi $\alpha > -5$ e $\alpha = -5$.

Se $\alpha > -5$, allora una soluzione y in scarti complementari con $\bar{x}$ deve soddisfare le condizioni $y_1 = y_3 = 0$. Affinché y sia duale ammissibile, deve soddisfare il sistema

$$
\begin{cases}
y_4 = \beta \\
y_2 = 1 \\
y_2,\ y_4 \geq 0.
\end{cases}
$$

Pertanto, in questo caso, $\bar{x}$ è una soluzione ottima di (P) se e solo se $\beta \geq 0$.

Se invece $\alpha = -5$, allora una soluzione y in scarti complementari con $\bar{x}$ deve soddisfare solo la condizione $y_3 = 0$. Affinché y sia duale ammissibile, deve soddisfare il sistema

$$
\begin{cases}
-y_1 + y_4 = \beta \\
-y_1 + y_2 = 1 \\
y_1,\ y_2,\ y_4 \geq 0
\end{cases}
$$

che equivale al sistema

$$
\begin{cases}
y_4 = y_1 + \beta \\
y_2 = y_1 + 1 \\
y_1,\ y_2,\ y_4 \geq 0
\end{cases}
$$

ossia $y_1 \geq \max\{0, -\beta\}$. Pertanto, in questo caso, per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione duale ammissibile in scarti complementari con $\bar{x}$, pertanto essa è una soluzione ottima di (P) qualunque sia il valore di $\beta \in \mathbb{R}$.

Ricapitolando, l'insieme delle coppie (α, β) per cui il punto $\bar{x}$ è ottimo è il seguente:

$$
\{(\alpha,\beta) : \ \alpha > -5,\ \beta \geq 0\} \cup \{(-5,\beta) : \ \beta \in \mathbb{R}\}.
$$

Esercizio 3. Risoluzione algebrica:

$$\text{Iterazione 1)} \quad B=\{1,2\}: A_B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ A_B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\ \bar{x}=A_B^{-1}b_B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B=cA_B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\quad \bar{y}_N=0,\quad \bar{y}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_N\bar{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -4\\ 4\end{bmatrix}\not\leq b_N=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 2\end{bmatrix},$$

$$k=\min\{i\in N:\ A_i\bar{x}>b_i\}=\min\{3,5\}=3 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\text{Definiamo } \eta_B=-A_kW=A_kA_B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix},$$

$$\vartheta=\min\{\bar{y}_i/\eta_i:\ i\in B,\ \eta_i>0\}=\min\{0,1\}=0,\quad h=\min\{i\in B:\ \eta_i>0,\ \vartheta=\bar{y}_i/\eta_i\}=1.$$

$$\text{Iterazione 2)} \quad B=\{2,3\}: A_B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ A_B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix},\ \bar{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\quad \bar{y}_N=0,\quad \bar{y}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_N\bar{x}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}\not\leq b_N=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{bmatrix},\ k=5,$$

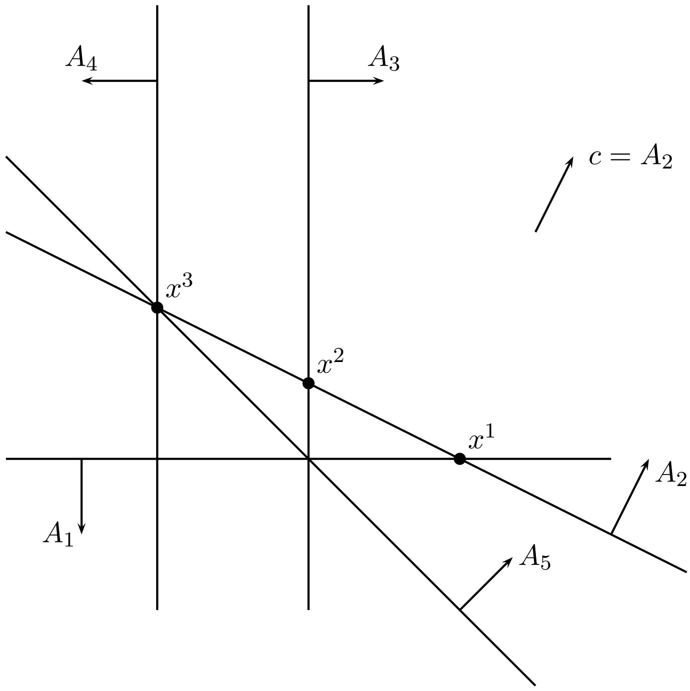
$$\eta_B=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\end{bmatrix},\quad \vartheta=0,\quad h=3.$$

$$\text{Iterazione 3)} \quad B=\{2,5\}: A_B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ A_B^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ \bar{x}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},$$

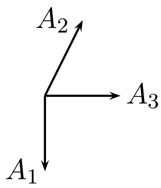
$$\bar{y}_B=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\quad \bar{y}_N=0,\quad \bar{y}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_N\bar{x}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\leq b_N=\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 0\end{bmatrix},\ \mathit{STOP}.$$

Risoluzione geometrica:

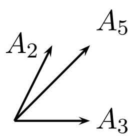


Iterazione 1) $B = \{1, 2\}$, x^1 viola i vincoli 3 e 5 da cui si ricava l'indice entrante $k = \min\{3, 5\} = 3$ (regola anticiclo di Bland). Poiché $c = A_2$, si ha $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$. Inoltre A_3 appartiene all'interno del cono generato da A_1 e A_2, come mostrato in figura:



pertanto $A_3 = \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2$ con $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$, da cui $y_1/\eta_1 = 0$ e $y_2/\eta_2 > 0$. L'indice uscente è quindi $h = 1$.

Iterazione 2) $B = \{2, 3\}$, x^2 viola solo il vincolo 5, per cui l'indice entrante è $k = 5$. Poiché $c = A_2$, si ha $y_2 = 1$ e $y_3 = 0$. Inoltre A_5 appartiene all'interno del cono generato da A_2 e A_3, come mostrato in figura:



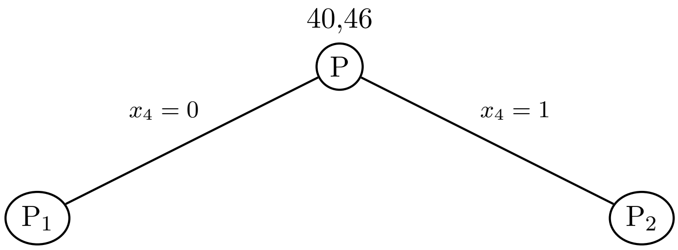
pertanto $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 > 0$, da cui $y_2/\eta_2 > 0$ e $y_3/\eta_3 = 0$. L'indice uscente è quindi $h = 3$.

Iterazione 3) $B = \{2, 5\}$, x^3 è una soluzione primale ammissibile e quindi è ottima per il primale. Poiché $c = A_2$, si ha $y_2 = 1$ e $y_5 = 0$, quindi una soluzione ottima del duale è $(0, 1, 0, 0, 0)$.

Esercizio 4. I rendimenti delle variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sono rispettivamente 10, $11/2 = 5.5$, $14/3 \simeq 4.6$, $26/7 \simeq 3.7$ e $5/2 = 2.5$. Per applicare l'algoritmo "greedy" basato sui rendimenti si analizzano le variabili in ordine decrescente di rendimento, cioè x_1, x_2, x_3, x_4, x_5: la soluzione ottenuta è $x = (1, 1, 1, 0, 1)$ di valore 40 che è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema, quindi $v_I(P) = 40$.

Analizzando le variabili nello stesso ordine si trova la soluzione ottima del rilassamento continuo che è $(1, 1, 1, 3/7, 0)$ di valore 46 che è una valutazione superiore del valore ottimo del problema, quindi $v_S(P) = 46$.

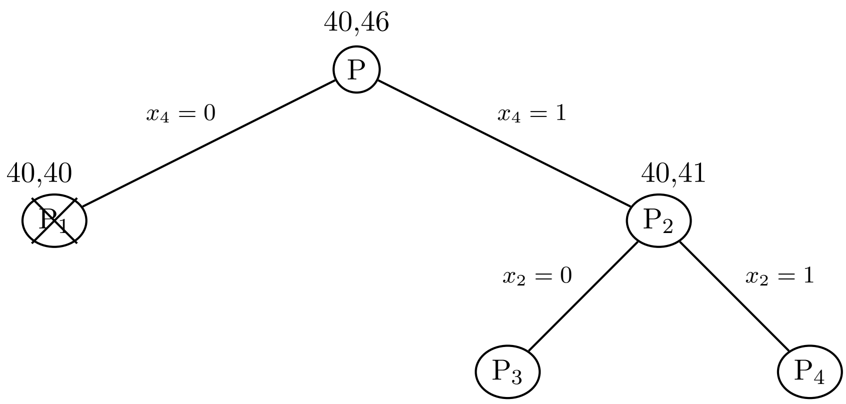
Iniziamo l'esplorazione dell'albero di enumerazione istanziando la variabile x_4:



La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema P_1 è $(1, 1, 1, 0, 1)$ di valore $40 = v_S(P_1)$. Poiché $v_S(P_1) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P_1.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(1, 1/2, 0, 1, 0)$ di valore $41 = v_S(P_2)$. Poiché $v_S(P_2) > v_I(P)$ e la soluzione ottenuta non è ammissibile, il nodo P_2 rimane aperto.

Dal nodo P_2 istanziamo la variabile x_2:



La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(1, 0, 1/3, 1, 0)$ di valore $40 = v_S(P_3)$. Poiché $v_S(P_3) = v_I(P)$, possiamo chiudere il nodo P_3.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_4 è $(0, 1, 0, 1, 0)$ di valore $37 = v_S(P_4)$. Poiché $v_S(P_4) < v_I(P)$, possiamo chiudere anche il nodo P_4 e l'algoritmo si ferma.

La soluzione ottima del problema dello zaino è pertanto $(1, 1, 1, 0, 1)$ di valore 40.