RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

1) Il capo della polizia privata SempreSecur deve decidere quanti poliziotti assegnare ai 24 turni di guardia nell'arco della giornata, sapendo che nell'ora j occorrono almeno $p(j)$ poliziotti in servizio, $j = 1, \ldots, 24$. Ogni turno dura 8 ore, con la quinta ora di riposo. I 24 turni si distinguono per l'ora di inizio. Inoltre, per equilibrare le risorse, egli intende assegnare i poliziotti ai turni in modo che la differenza tra il numero di poliziotti assegnati al turno i e al turno $i + 1$ sia in valore assoluto non superiore ad una data soglia v, per $i = 1, \ldots, 23$.

Si formuli il problema del capo della polizia in termini di P.L.I., con l'obiettivo di minimizzare il numero totale di poliziotti assegnati ai turni.

2) In seguito alla chiusura delle scuole, gli n bambini di un distretto scolastico devono essere assegnati a m campi estivi per trascorrere il periodo delle vacanze. E' noto il grado di preferenza, p_{ij}, del bambino i, per $i = 1, \ldots, n$, nei confronti del campo estivo j, $j = 1, \ldots, m$. Sia poi k il massimo numero di bambini che un singolo campo estivo può accogliere.

Per cercare di non scontentare troppo i bambini, si vuole determinare un assegnamento che massimizzi il minimo livello di preferenza associato ai campi estivi, dove il livello di preferenza di un campo estivo è definito come la somma dei gradi di preferenza dei bambini ad esso assegnati.

Si formuli il problema in termini di P.L.I.

3) Durante una serata di beneficienza per la raccolta di fondi per finanziare le ricerche in Ricerca Operativa, vengono messi in vendita n oggetti donati dalle squadre di calcio di serie A. Alla serata partecipano m imprenditori con $m \leq 2n$; ciascun imprenditore $i, i = 1, \ldots, m$, indica l'insieme $O(i)$ di oggetti che intende comprare e la somma massima q_i che è disposto a spendere, fornendo anche il prezzo c_{ij} che è disposto a pagare per ciascun oggetto $j \in O(i)$. Il comitato organizzatore decide quindi di assegnare gli oggetti agli imprenditori in modo da vendere tutti gli oggetti massimizzando il profitto della serata, rispettando le indicazioni da loro date e garantendo che a ciascun imprenditore siano assegnati almeno due oggetti.

Formulare il problema come problema di P.L.I.

4) Un'azienda vinicola ha n clienti, ognuno dei quali richiede b_i casse di vino, $i = 1, \ldots, n$. L'azienda decide di costruire p cantine per rendere efficiente la distribuzione del vino ai clienti. Ognuna delle p cantine può essere costruita con capacità U oppure u (espresse come numero di casse di vino). Per ogni cantina di capacità U, l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a c_1, mentre per ogni cantina di capacità u l'azienda sosterrà un costo di costruzione pari a c_2. Sia c_{ij} il costo sostenuto dall'azienda nel caso in cui il cliente i si rifornisca dalla cantina j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di stabilire le capacità delle p cantine, e decidere l'assegnamento dei clienti alle cantine (ogni cliente va assegnato ad una sola cantina), in modo da soddisfare le richieste dei clienti e rispettare i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale sostenuto dall'azienda.

5) Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$: N è l'insieme dei nodi logistici, mentre A è l'insieme dei collegamenti potenziali tra i nodi. Il gestore della rete deve decidere quali collegamenti attivare (e, quindi, poter utilizzare) per inviare d bancali dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Se attivato, sul collegamento $(i, j) \in A$ possono essere inviati al più u_{ij} bancali.

Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere quali collegamenti attivare, e come effettuare l'invio dei d bancali utilizzando i collegamenti attivati, in modo da minimizzare il massimo numero di bancali inviati su ciascun collegamento della rete.

6) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. Il gestore della rete deve inviare un messaggio da un nodo sorgente $s \in N$ ad un nodo destinazione $t \in N$. Per velocizzare l'invio, ed evitare conflitti lungo i link della rete, il gestore decide di suddividere il messaggio in due pacchetti, e di inviare i due pacchetti simultaneamente lungo due cammini di G da s a t formati da archi tra loro disgiunti. Indicando con t_{ij} il tempo di transito lungo la linea (i, j), si formuli in termini di P.L.I. il problema di inviare i due pacchetti da s a t lungo due cammini disgiunti del grafo, in modo tale da minimizzare il tempo in cui l'intero messaggio giunge a destinazione, ossia il massimo tra i tempi di arrivo dei due pacchetti in t (si assuma che il gestore invii simultaneamente i due pacchetti dal nodo s al tempo zero).

7) Si formuli, in termini di P.L.I., il problema di minimizzare il costo mensile di stoccaggio $c(x)$ di un'azienda, che vale 0 nel caso in cui la quantità x di merce stoccata in magazzino sia compresa tra 0 e 10 bancali, ed è invece definito dalla funzione lineare $50 + x$ nel caso in cui il numero x di bancali stoccati sia maggiore di 10 e minore o uguale della capacità del magazzino, che è pari a 100 bancali. Per esigenze di produzione l'azienda necessita di stoccare almeno L bancali al mese. Si dimostri la correttezza della formulazione proposta.

8) Si consideri una rete logistica descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. La ditta *GoOn* vuole organizzare una spedizione lungo tale rete. Specificatamente, deve inviare b pacchi dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$. Per motivi gestionali, *GoOn* richiede che il numero dei nodi della rete interessati dal transito dei pacchi, a parte s e t, non sia superiore a K.

Noto il numero massimo di pacchi u_{ij} inviabili lungo il collegamento $(i, j) \in A$, e noto il costo unitario di invio c_{ij} lungo (i, j), si formuli in termini di P.L.I. il problema di effettuare l'invio da s a t a costo minimo, rispettando la capacità dei collegamenti ed il vincolo relativo al numero di nodi interessati dal transito.

9) Dopo avere finalmente superato l'esame di Ricerca Operativa, Tommaso è pronto per partire in vacanza. Tommaso sceglie n oggetti che desidera portare con sè, e si pone il problema di mattere tali oggetti nel suo set di m valigie, tutte indentiche tra loro. Individua tre sottoinsiemi di oggetti critici per il trasporto, vale a dire l'insieme S delle paia di scarpe, l'insieme A degli abiti facilmente spiegazzabili, e l'insieme I degli oggetti per l'igiene personale. Per ovvie ragioni decide che nessun paio di scarpe possa essere inserito in valigia insieme ad un oggetto di igiene personale, e neppure insieme ad un abito spiegazzabile.

Sapendo che l'oggetto i ha peso p_i, e che ogni valigia è in grado di contenere oggetti per un peso complessivo pari a P, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere come mettere gli oggetti nelle valigie minimizzando il numero di valigie utilizzate, nel rispetto dei vincoli di peso e dei vincoli di compatibilità tra oggetti.

10) La ditta *FastShip* deve caricare n bancali su una nave avente m stive. Sono noti il peso p_i del bancale i e la capacità u_j della stiva j. Per motivi di stabilità del carico della nave, la stiva 1 e la stiva m devono essere necessariamente utilizzate. Inoltre, la differenza in valore assoluto tra il peso totale degli oggetti caricati in tali due stive non deve eccedere una soglia di tolleranza prefissata ε.

Sapendo che l'utilizzo della stiva j comporta il pagamento di un costo di manutenzione f_j, e che il caricamento del bancale i nella stiva j richiede un costo di caricamento c_{ij}, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come caricare i bancali nelle stive della nave, in modo da rispettare il vincolo di stabilità del carico ed i vincoli di capacità, minimizzando il costo totale derivante dalla manutenzione delle stive e dalle operazioni di caricamento.

11) L'agenzia di smaltimento rifiuti *PulitiSubito* deve aprire k discariche in una importante regione italiana. A tal fine individua un insieme J di siti candidati all'apertura di una discarica, con $|J| \geq k$. L'agenzia censisce inoltre l'insieme I dei principali centri abitati della regione, e stima le distanze d_{ij} intercorrenti tra il centro abitato $i \in I$ e il sito candidato $j \in J$.

Considerando come discarica *critica* per il centro abitato $i \in I$ la discarica più vicina a i tra quelle aperte, si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere dove aprire le k discariche in modo da massimizzare la somma delle distanze intercorrenti tra ogni centro abitato e la relativa discarica critica.

12) Dopo la caduta del governo, il Grande Leader del Partito Azzurro sta attentamente pianificando la rivincita elettorale per la Grande Coalizione, che comprende anche gli alleati del Partito Nero. Il territorio nazionale è diviso in n collegi uninominali, in cui vince un seggio il candidato che ottiene il maggior numero di voti. Il Partito ha una lista di n personalità disposte a candidarsi, ed i sondaggisti del Grande Leader gli assicurano che la Coalizione vincerà in tutti i collegi uninominali, indipendentemente dal candidato prescelto. Il numero di voti che un candidato prende è anche rilevante ai fini della quota proporzionale: per ciascun collegio i e personalità j si conosce il numero di voti v_{ij} che il candidato prenderebbe se si presentasse in quel collegio, ed il partito riceverà un ulteriore seggio ogni δ voti ottenuti dai propri candidati eletti. Infine, esiste un premio di maggioranza su base regionale: gli n collegi sono raggruppati in 21 regioni R_h, $h = 1, \ldots, 21$, ed il partito che conquista la maggioranza dei collegi nella regione h ha diritto ad altri r_h deputati.

Il Grande Leader deve decidere la spartizione dei collegi. Gli accordi col Partito Nero stabiliscono che non più del 60% dei candidati della Coalizione potrà appartenere al Partito Azzurro, e che il Partito Azzurro non dovrà vincere il premio di maggioranza in più di 13 regioni su 21. Per evitare qualsiasi problema di ribaltone, il Grande Leader vuole determinare in quali collegi presentare un candidato del suo partito, ed eventualmente quale, in modo che il numero totale di deputati ottenuti sia massimo; se il numero totale di voti ottenuti non è multiplo di δ nella massimizzazione si valuta anche la parte frazionaria. Si formuli come *PLI* il problema corrispondente.

13) Si considerino due insiemi di soluzioni ammissibili. Il primo insieme è così definito:

$$T_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 200, x_1 \leq 50\}.$$

Il secondo insieme è invece definito come segue:

$$T_2 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 \leq 500\}.$$

Si caratterizzi, utilizzando vincoli di tipo P.L.I., l'unione dei due insiemi di soluzioni ammissibili, giustificando la risposta.

14) La ENRI (ENergie RInnovabili) deve pianificare l'utilizzo delle sue centrali elettriche per la giornata di domani. ENRI conosce la domanda di energia elettrica d_t (KWh) di tutti i suoi clienti per ciascuna ora $t = 1, \ldots, 24$. Conosce inoltre la quantità p_t (KWh) di energia elettrica che le sue centrali fotovoltaiche ed eoliche produrranno; a ragione della elevata variabilità di queste ultime, è possibile che la produzione da fonti rinnovabili non sia sufficiente a coprire la domanda. Per questo ENRI può utilizzare come scorta n centrali tradizionali a combustibili fossili. Ciascuna centrale h può essere accesa una volta sola nella giornata, ad un prefissato orario t_h. Per la prima ora di funzionamento segue un programma di accensione prestabilito in cui produce esattamente a_h KWh. Dalla seconda ora la centrale entra nello stato stazionario, in cui può variare a piacere, in ogni ora, l'energia prodotta tra un minimo l_h ed un massimo u_h (KWh). Lo stato stazionario dura esattamente s_h ore; all'ora $t_h + s_h + 1$ la centrale deve eseguire un programma di spengimento prestabilito, simmetrico a quello di accensione, in cui produce a_h KWh, e dall'ora successiva la centrale è spenta. Il costo di produrre un KWh (in qualsiasi fase di funzionamento) con la centrale è pari a f_h. Se la produzione complessiva di energia, rinnovabile e non, di ENRI non è sufficiente a coprire la domanda all'ora t, la porzione rimanente deve essere acquistata sul mercato ad un prezzo unitario c_t; se, viceversa, la produzione di energia è superiore alla domanda, il surplus viene venduto sul mercato allo stesso prezzo. Si formuli come *PLI* il problema di decidere quali centrali accendere, ed a che potenza farle operare durante lo stato stazionario, in modo da massimizzare il profitto per ENRI, dato dalla differenza tra il guadagno dovuto alla vendita del surplus sul mercato ed il costo dovuto sia all'approvvigionamento dell'energia mancante sul mercato sia al costo di produzione di energia.