Albero di copertura di costo minimo

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2018/19

Introduzione

Problema

Dato un grafo $G = (N, A)$ non orientato, in cui ad ogni arco (i, j) è associato un costo c_{ij}, trovare un albero di copertura T di costo minimo, dove il costo di T è definito come $\sum_{(i,j)\in T} c_{ij}$

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che il grafo G sia completo, eventualmente aggiungendo archi di costo M, dove M è sufficientemente grande (ad esempio $M > \max_{(i,j)\in A} c_{ij}$).

Modello 1

Sia $N = \{1, \ldots, n\}$.
Per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ con $i < j$, definiamo le variabili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'albero contiene l'arco } (i,j), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Modello di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i<j} x_{ij} = n - 1 \\ \displaystyle\sum_{i,j \in S:\ i<j} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad \forall\ S \subseteq N \text{ tale che } |S| \geq 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(vincoli di eliminazione dei cicli)} \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \ \text{con } i < j \end{cases}$$

Modello 2

Variabili decisionali: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'albero contiene l'arco } (i,j), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello di ottimizzazione:

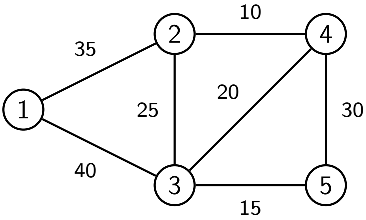
$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{i<j} x_{ij} = n-1 \\ \displaystyle\sum_{i \in S, j \notin S:\ i<j} x_{ij} + \sum_{i \notin S, j \in S:\ i<j} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall\ S \subseteq N \text{ tale che } |S| \geq 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(vincoli di connessione)} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j = 1,\dots,n, \text{ con } i<j \end{cases}$$

Condizioni di ottimalità sui cicli

Teorema

Sia T un albero di copertura.
T è un albero di copertura di costo minimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \notin T$ si ha $c_{uv} \geq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al cammino in T che connette u e v.

Esempio. Si consideri il seguente problema:



Verificare che l'albero $T_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo
mentre l'albero $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ non è ottimo.

Condizioni di ottimalità sui tagli

Teorema

Sia T un albero di copertura.
T è un albero di copertura di costo minimo se e solo se per ogni arco $(u, v) \in T$ si ha $c_{uv} \leq c_{ij}$ per ogni arco (i, j) appartenente al taglio ottenuto eliminando da T l'arco (u, v).

Esercizio 1. Con riferimento all'esempio di pag. 5, utilizzare le condizioni di ottimalità sui tagli per verificare che l'albero $T_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}$ è ottimo, mentre l'albero $T_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ non è ottimo.

Algoritmo di Kruskal

0. Ordina gli archi $a_1, \dots, a_m$ in ordine crescente di costo. $T = \emptyset$, k=1.

1. Se $|T| = n - 1$ allora stop

2. Se a_k non forma un ciclo con gli archi di T allora $T = T \cup \{a_k\}$

3. $k = k + 1$ e torna al passo 1.

Esercizio 2. Con riferimento all'esempio di pag. 5, utilizzare l'algoritmo di Kruskal per trovare un albero ottimo.