Programmazione lineare: risoluzione grafica

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2018/19

Problema del contadino

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi e 160 t di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t di concime per ettaro di lattuga, 3 t di tuberi e 20 t di concime per ettaro di patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

Problema del contadino - modello di PL

Variabili decisionali:
x_L = numero di ettari da coltivare a lattuga
x_P = numero di ettari da coltivare a patate

Modello di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max \ 3000x_L + 5000x_P \\ x_L + x_P \leq 12 \\ 7x_L \leq 70 \\ 3x_P \leq 18 \\ 10x_L + 20x_P \leq 160 \\ x_L \geq 0 \\ x_P \geq 0 \end{cases}$$

Forma matriciale

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$

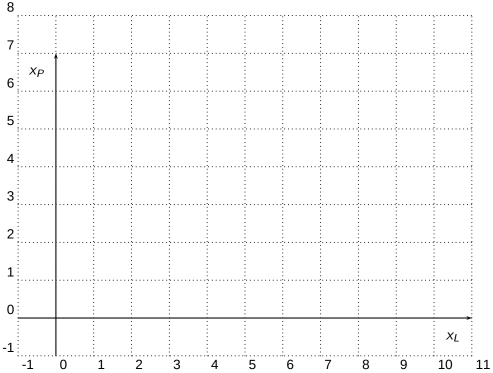
$$
\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \quad \text{dove } x = \begin{pmatrix} x_L \\ x_P \end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

$m =$ numero di vincoli
$n =$ numero di variabili
A matrice $m \times n$
b vettore con m componenti
c vettore con n componenti

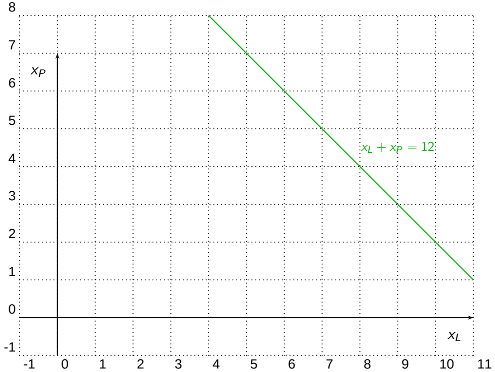
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max \;\; & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

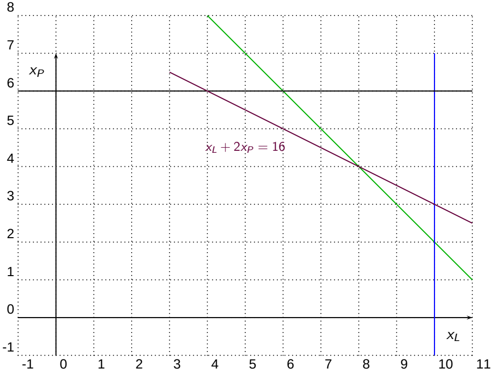
$$\begin{aligned} \max\ & 3x_L + 5x_P \\ x_L + x_P & \leq 12 \\ x_L & \leq 10 \\ x_P & \leq 6 \\ x_L + 2x_P & \leq 16 \\ -x_L & \leq 0 \\ -x_P & \leq 0 \end{aligned}$$

Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$

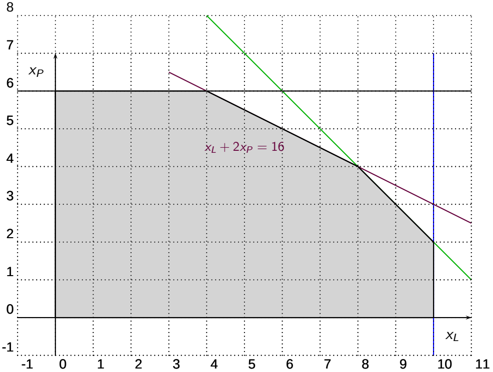
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

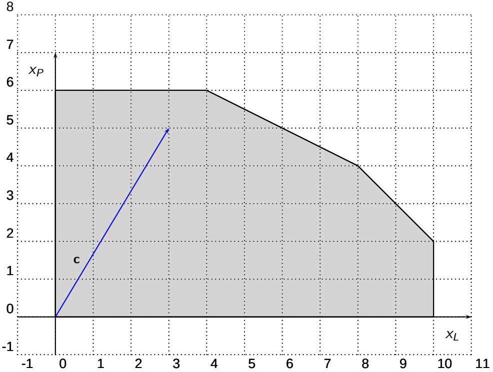
$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

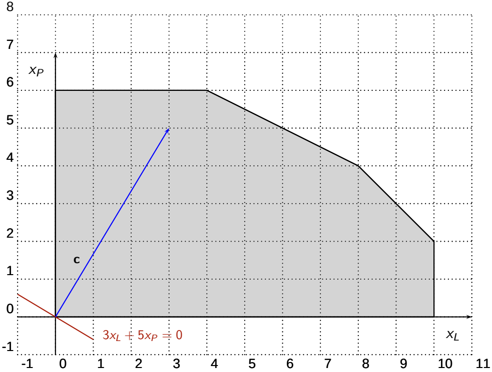
$$
\begin{aligned}
\max \ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

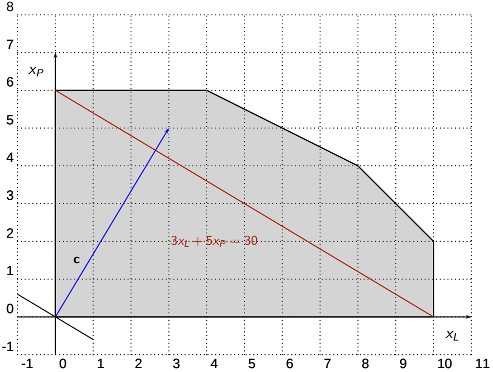
$$\begin{aligned} \max \ & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \le 12 \\ & x_L \le 10 \\ & x_P \le 6 \\ & x_L + 2x_P \le 16 \\ & -x_L \le 0 \\ & -x_P \le 0 \end{aligned}$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

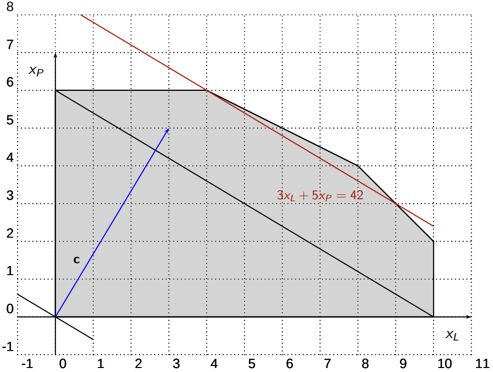
$$
\begin{aligned}
\max \; & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

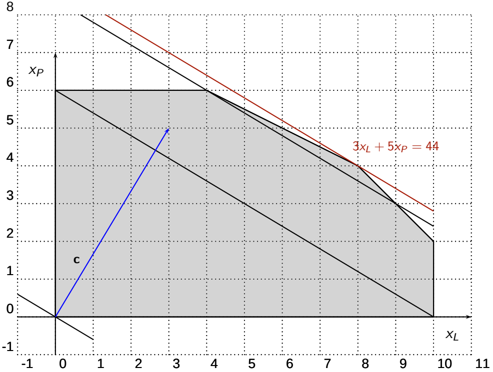
$$
\begin{aligned}
\max \;\; & 3x_L + 5x_P \\
x_L + x_P & \leq 12 \\
x_L & \leq 10 \\
x_P & \leq 6 \\
x_L + 2x_P & \leq 16 \\
-x_L & \leq 0 \\
-x_P & \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

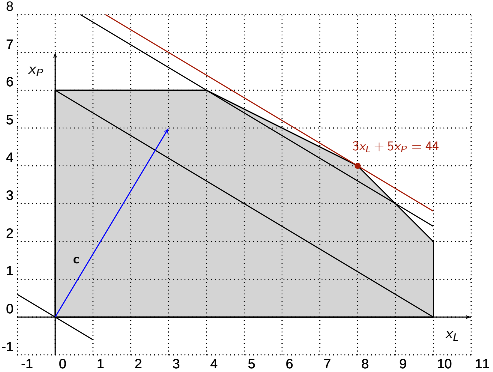
$$
\begin{aligned}
\max \; & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Risoluzione grafica del problema

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

$$
\begin{aligned}
\max \;\; & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Soluzione ottima: $x_L = 8, x_P = 4$ (8 ettari di lattuga, 4 ettari di patate)
Valore ottimo $= 44$ (ricavo massimo 44000 €)