Introduzione alla Programmazione Lineare Intera

Mauro Passacantando

Dipartimento di Informatica, Università di Pisa
mauro.passacantando@unipi.it

Corso di Ricerca Operativa A
Laurea in Informatica - Università di Pisa - a.a. 2018/19

Relazioni tra PLI e PL

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera nella forma

$$\begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ A x \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{P}$$

dove i dati A, b, c sono a componenti intere e la regione ammissibile Ω è limitata.

Teorema

Il problema (P) è NP-hard.

Relazioni tra PLI e PL

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare Intera nella forma

$$\begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ A x \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{P}$$

dove i dati A, b, c sono a componenti intere e la regione ammissibile Ω è limitata.

Teorema
Il problema (P) è NP-hard.

Definizione
Il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ A x \leq b \end{cases} \tag{RC}$$

è detto rilassamento continuo di (P).

Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

Teorema

- Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).

Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

Teorema

- Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).
- Se la soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P), allora è ottima anche per (P).

Relazioni tra PLI e PL

Che relazione c'è tra (P) e (RC)?

Teorema

- Il valore ottimo di (RC) è maggiore o uguale del valore ottimo di (P).
- Se la soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P), allora è ottima anche per (P).

Spesso la soluzione ottima di (RC) non è ammissibile per (P)...

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata?

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

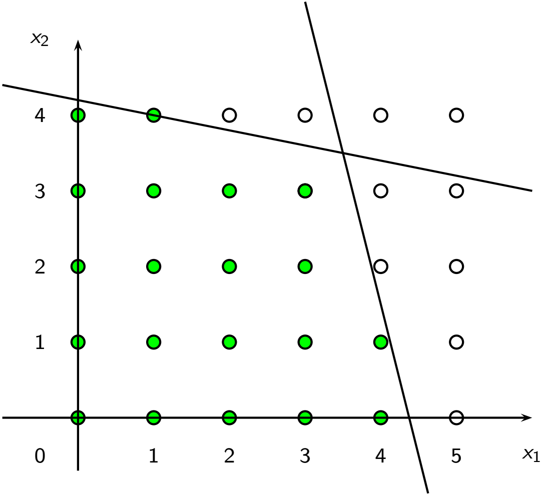
$$
\begin{cases}
\max\ x_1 + 3\,x_2 \\
x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\
8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\
x \geq 0 \\
x \in \mathbb{Z}^2
\end{cases}
$$

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

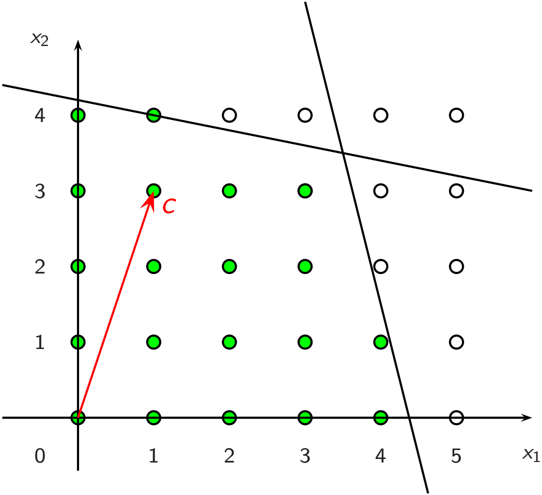


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$
\begin{cases}
\max \; x_1 + 3\,x_2 \\
x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\
8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\
x \geq 0 \\
x \in \mathbb{Z}^2
\end{cases}
$$

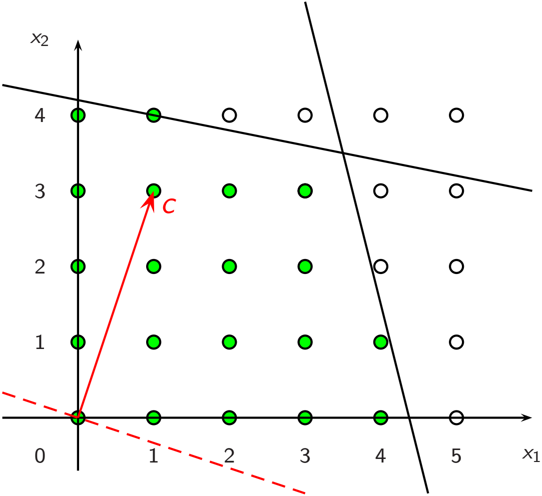


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \le 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \le 35 \\ x \ge 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

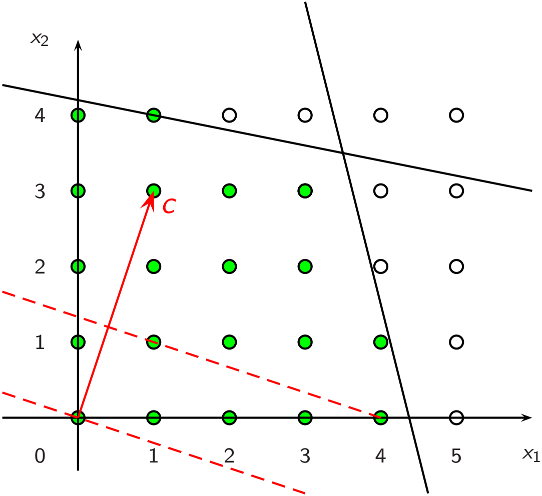


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

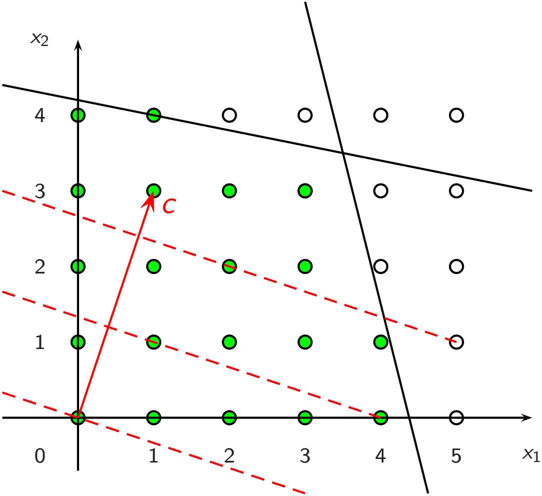


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max \; x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

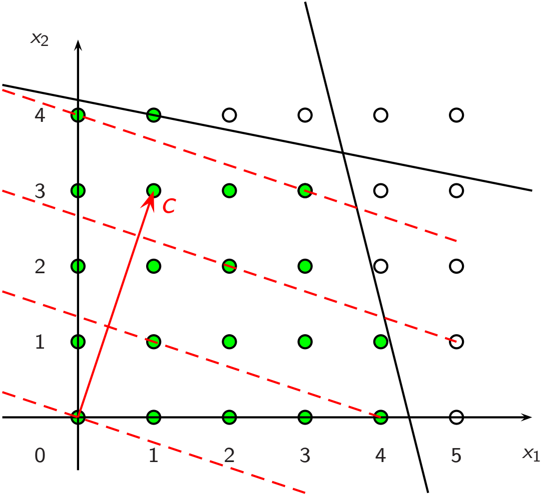


Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$



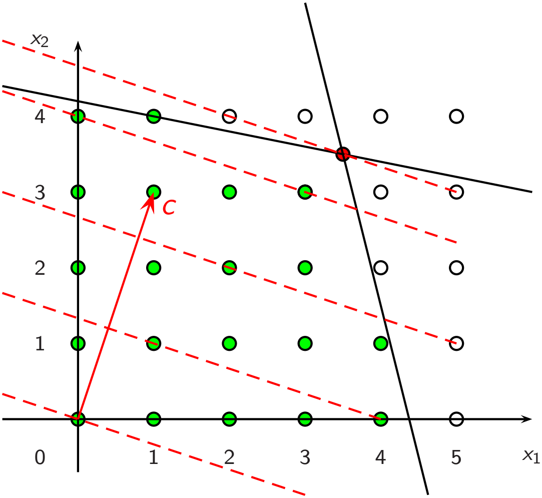
Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max \; x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo



Relazioni tra PLI e PL

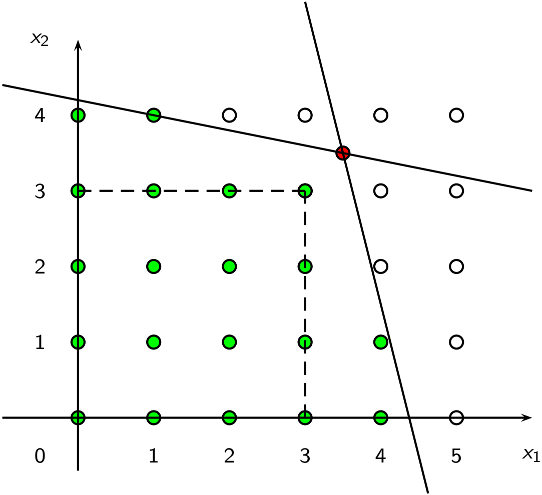
Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo

arrotondamento $\rightarrow (3, 3)$



Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

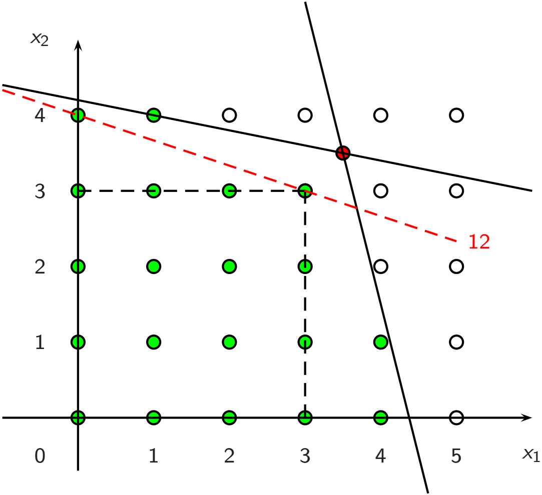
Esempio

$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo

arrotondamento $\rightarrow (3, 3)$

$(3, 3)$ non è ottima



Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo de arrotondare la soluzione trovata? NO

Esempio

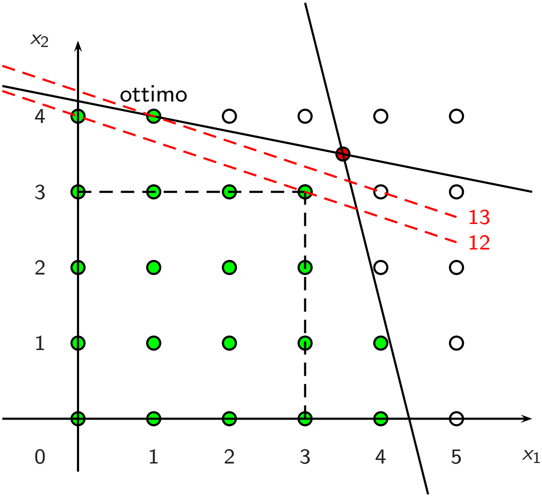
$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo rilas. continuo

arrotondamento $\to (3,3)$

$(3,3)$ non è ottima

la sol. ottima è $(1,4)$



Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e scegliere la soluzione ammissibile più vicina rispetto alla distanza euclidea?

Relazioni tra PLI e PL

Per risolvere (P) è sufficiente risolvere il suo rilassamento continuo e scegliere la soluzione ammissibile più vicina rispetto alla distanza euclidea? NO

Esempio

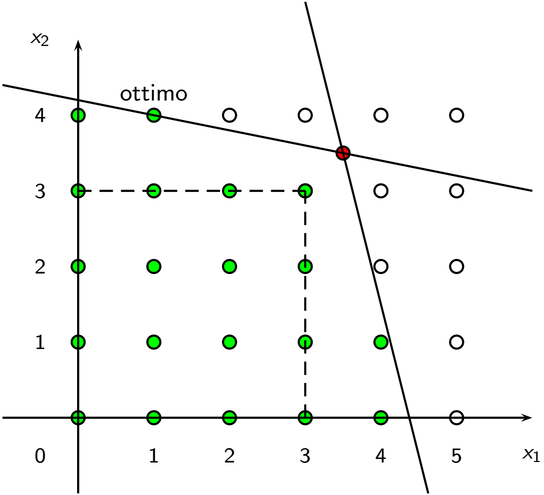
$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottimo ril. cont.

sol. più vicina è $(3, 3)$

ma $(3, 3)$ non è ottima

la sol. ottima è $(1, 4)$



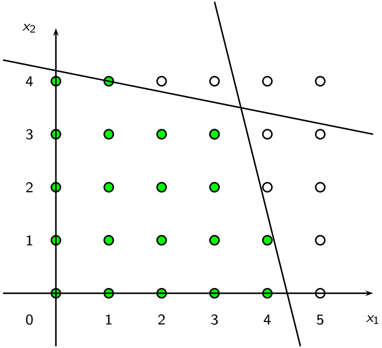
Relazioni tra PLI e PL

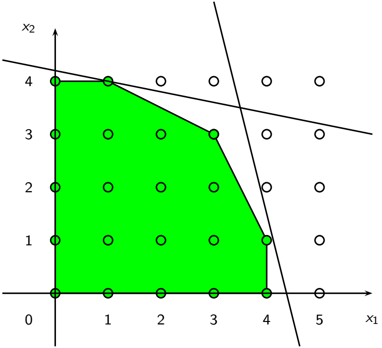
Consideriamo i problemi:

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

dove conv(Ω) è l'involucro convesso delle soluzioni ammissibili, cioè il più piccolo insieme convesso che contiene Ω.

Esempio





Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- conv(Ω) è un poliedro

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω
- I problemi

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω
- I problemi

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

  hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Corollario

Il problema di PLI

$$\max_{x \in \Omega} c^{\mathsf{T}} x$$

è equivalente al problema di PL

$$\max_{x \in \text{conv}(\Omega)} c^{\mathsf{T}} x$$

Relazioni tra PLI e PL

Teorema

- $\text{conv}(\Omega)$ è un poliedro
- I vertici di $\text{conv}(\Omega)$ appartengono a Ω
- I problemi

$$\begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} \max c^{\mathsf{T}} x \\ x \in \text{conv}(\Omega) \end{cases}$$

  hanno lo stesso valore ottimo e almeno una soluzione ottima comune

Corollario

Il problema di PLI

$$\max_{x \in \Omega} c^{\mathsf{T}} x$$

è equivalente al problema di PL

$$\max_{x \in \text{conv}(\Omega)} c^{\mathsf{T}} x$$

In generale è difficile trovare i vincoli che definiscono $\text{conv}(\Omega)$ ...

Matrici totalmente unimodulari

Per alcuni particolari problemi si riesce a caratterizzare conv(Ω).

Teorema

Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n : \; Ax \leq b\}$. Se A è una matrice totalmente unimodulare (cioè il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0 oppure 1 oppure -1), allora

$$\text{conv}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\},$$

cioè conv(Ω) coincide con la regione ammissibile del rilassamento continuo.

Matrici totalmente unimodulari

Per alcuni particolari problemi si riesce a caratterizzare conv(Ω).

Teorema

Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{Z}^n : \ Ax \leq b\}$. Se A è una matrice totalmente unimodulare (cioè il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata è 0 oppure 1 oppure -1), allora

$$\text{conv}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\},$$

cioè conv(Ω) coincide con la regione ammissibile del rilassamento continuo.

Esempi

In un problema di flusso di costo minimo con variabili intere:

$$\begin{cases} \min \ c^{\mathsf{T}} x \\ E\,x = b \\ 0 \leq x \leq u \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

la matrice dei vincoli è totalmente unimodulare. Quindi per risolverlo basta trovare un vertice ottimo del suo rilassamento continuo.

Lo stesso vale per il problema del cammino minimo.

Disuguaglianze valide e piani di taglio

In generale è difficile caratterizzare conv(Ω).
Si aggiungono vincoli alla regione ammissibile del rilassamento continuo in modo da approssimare conv(Ω).

Definizioni

La disequazione $p^{\mathsf{T}}x \leq p_0$ è detta disuguaglianza valida (DV) per l'insieme Ω se

$$p^{\mathsf{T}}x \leq p_0 \qquad \forall\ x \in \Omega.$$

Un piano di taglio è una disuguaglianza valida $p^{\mathsf{T}}x \leq p_0$ per Ω tale che $p^{\mathsf{T}}\bar{x} > p_0$, dove $\bar{x}$ è l'ottimo del rilassamento continuo.

Disuguaglianze valide e piani di taglio

In generale è difficile caratterizzare conv(Ω).
Si aggiungono vincoli alla regione ammissibile del rilassamento continuo in modo da approssimare conv(Ω).

Definizioni

La disequazione $p^{\mathsf{T}} x \leq p_0$ è detta disuguaglianza valida (DV) per l'insieme Ω se

$$p^{\mathsf{T}} x \leq p_0 \qquad \forall\ x \in \Omega.$$

Un piano di taglio è una disuguaglianza valida $p^{\mathsf{T}} x \leq p_0$ per Ω tale che $p^{\mathsf{T}} \bar{x} > p_0$, dove $\bar{x}$ è l'ottimo del rilassamento continuo.

Idea alla base del metodo dei piani di taglio:
se P è la regione ammissibile del rilassamento continuo e la soluzione ottima $\bar{x}$ di $\max\limits_{x \in P} c^{\mathsf{T}} x$ appartiene ad Ω, allora $\bar{x}$ è ottima anche per $\max\limits_{x \in \Omega} c^{\mathsf{T}} x$;
altrimenti si costruisce un piano di taglio $p^{\mathsf{T}} x \leq p_0$ in modo da tagliare fuori $\bar{x}$ e poi risolvere il nuovo problema di PL:

$$\begin{cases} \max\ c^{\mathsf{T}} x \\ x \in P \\ p^{\mathsf{T}} x \leq p_0 \end{cases}$$

Piani di taglio di Gomory

Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\begin{cases} \max\ c^{\mathsf{T}} x \\ A x = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \tag{P}$$

e che B sia una base ottima del rilassamento continuo di (P). Poniamo:

$$A = (A_B\ A_N) \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \widetilde{b} = \bar{x}_B \qquad \widetilde{A} = A_B^{-1} A_N$$

La parte frazionaria di un numero reale z è $\{z\} := z - \lfloor z \rfloor$

Piani di taglio di Gomory

Supponiamo che il problema di PLI sia nella forma

$$\begin{cases} \max \ c^{\mathsf{T}} x \\ A x = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

e che B sia una base ottima del rilassamento continuo di (P). Poniamo:

$$A = (A_B \ A_N) \qquad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \widetilde{b} = \bar{x}_B \qquad \widetilde{A} = A_B^{-1} A_N$$

La parte frazionaria di un numero reale z è $\{z\} := z - \lfloor z \rfloor$

Teorema

Se esiste $r \in B$ tale che $\widetilde{b}_r \notin \mathbb{Z}$, allora

$$\sum_{j \in N} \{\widetilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{\widetilde{b}_r\}$$

è un piano di taglio di Gomory per il problema (P).

Piani di taglio di Gomory

Dimostrazione

Fissiamo $x \in \Omega$. Allora

$$A\,x = A_B\,x_B + A_N\,x_N = b,$$

quindi

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N\,x_N = \widetilde{b} - \widetilde{A}\,x_N.$$

Definiamo il vettore $\widetilde{x} = x_B$. Quindi:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_r &= \widetilde{b}_r - \sum_{j \in N} \widetilde{a}_{rj} x_j \\
&= \lfloor \widetilde{b}_r \rfloor + \{\widetilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} \left(\lfloor \widetilde{a}_{rj} \rfloor + \{\widetilde{a}_{rj}\} \right) x_j \\
&= \lfloor \widetilde{b}_r \rfloor + \{\widetilde{b}_r\} - \sum_{j \in N} \lfloor \widetilde{a}_{rj} \rfloor x_j - \sum_{j \in N} \{\widetilde{a}_{rj}\} x_j,
\end{aligned}$$

di conseguenza

Piani di taglio di Gomory

Dimostrazione (segue)

$$\sum_{j\in N}\{\widetilde{a}_{rj}\}x_j - \{\widetilde{b}_r\} = \lfloor\widetilde{b}_r\rfloor - \sum_{j\in N}\lfloor\widetilde{a}_{rj}\rfloor x_j - \widetilde{x}_r \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Inoltre si ha:

$$\sum_{j\in N}\{\widetilde{a}_{rj}\}x_j - \{\widetilde{b}_r\} \geq -\{\widetilde{b}_r\} > -1. \tag{2}$$

Dalle relazioni (1) e (2), otteniamo che:

$$\sum_{j\in N}\{\widetilde{a}_{rj}\}x_j \geq \{\widetilde{b}_r\}. \tag{3}$$

quindi la (3) è una DV per Ω. Inoltre la (3) non è soddisfatta da $\bar{x}$, infatti:

$$0 = \sum_{j\in N}\{\widetilde{a}_{rj}\}\bar{x}_j < \{\widetilde{b}_r\},$$

quindi la (3) è un piano di taglio. □

Piani di taglio di Gomory

Esempio

Consideriamo di nuovo il problema

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Trasformiamo i vincoli di $\leq$ in vincoli di $=$ aggiungendo variabili di scarto x_3, x_4:

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3\,x_2 \\ x_1 + 5\,x_2 + x_3 = 21 \\ 8\,x_1 + 2\,x_2 + x_4 = 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 35 \end{pmatrix}, \qquad c^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio

La soluzione ottima del rilassamento continuo è $\bar{x} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right)$.

Quindi la base ottima è $B = \{1, 2\}$,

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{19} & \dfrac{5}{38} \\ \dfrac{4}{19} & -\dfrac{1}{38} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{19} & \dfrac{5}{38} \\ \dfrac{4}{19} & -\dfrac{1}{38} \end{pmatrix}.$$

Poiché $\widetilde{b} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ha entrambe le componenti non intere, esistono due tagli di Gomory.

Piani di taglio di Gomory

Esempio

Se $r = 1$, allora il piano di taglio di Gomory è

$$\left\{-\frac{1}{19}\right\} x_3 + \left\{\frac{5}{38}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{7}{2}\right\},$$

cioè

$$\frac{18}{19} x_3 + \frac{5}{38} x_4 \geq \frac{1}{2},$$

ossia

$$36 x_3 + 5 x_4 \geq 19,$$

che nelle variabili (x_1, x_2) equivale a

$$36(21 - x_1 - 5x_2) + 5(35 - 8x_1 - 2x_2) \geq 19$$

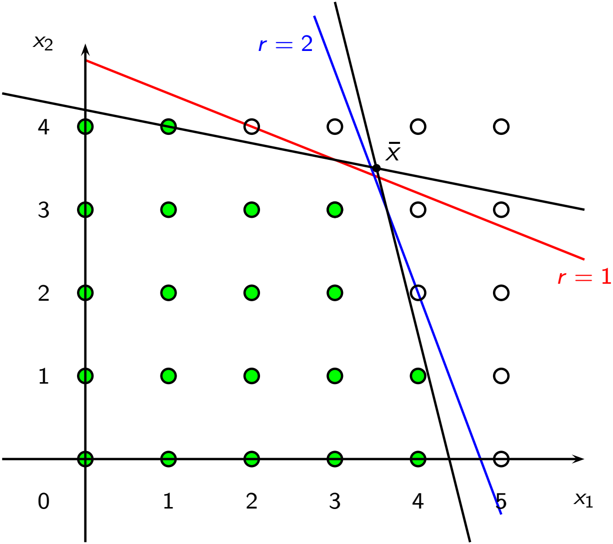
cioè

$$2x_1 + 5x_2 \leq 24.$$

Analogamente per $r = 2$ si ottiene il piano di taglio $8x_1 + 3x_2 \leq 38$.

Piani di taglio di Gomory

Esempio



Esercizio 1

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max \ 12\ x_1 + 5\ x_2 \\ 8\ x_1 + 15\ x_2 \leq 45 \\ 15\ x_1 + 11\ x_2 \leq 63 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Disegnare l'insieme conv(Ω), dove Ω è la regione ammissibile del problema.

b) Risolvere graficamente il rilassamento continuo del problema.

c) Calcolare un taglio di Gomory.

Esercizio 2

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 6\,x_1 + 13\,x_2 \\ 17\,x_1 + 7\,x_2 \geq 63 \\ 7\,x_1 + 6\,x_2 \geq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Disegnare l'insieme conv(Ω), dove Ω è la regione ammissibile del problema.

b) Risolvere graficamente il rilassamento continuo del problema.

c) Calcolare un taglio di Gomory.