Esame di Ricerca Operativa del 20/06/2016

(Cognome)	(Nome)	(Matricola)

Esercizio 1. Un'industria automobilistica produce 3 diversi modelli di autovettura: classic, elegance e sport. Ogni autovettura deve essere lavorata in tre diversi stabilimenti A, B e C. I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella seguente tabella, insieme al profitto netto in euro realizzato per autovettura:

	classic	elegance	sport
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Profitto	10000	15000	22000

La capacità produttiva giornaliera dei tre stabilimenti è limitata ad 8 ore per gli stabilimenti A e B ed a 5 ore per lo stabilimento C. Il numero di autovetture sport non deve superare il 20% del totale, mentre il numero di autovetture classic deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Tenendo conto che l'industria può vendere tutte le autovetture prodotte, determinare le quantità giornaliere da produrre per ciascun modello, in modo da massimizzare i profitti, rispettando i vincoli di produzione.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + x_2 \\ x_2 \le 0 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 4 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + 2\,x_2 \le 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{1, 5\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 18\ x_1 + 5\ x_2 \\ 12\ x_1 + 10\ x_2 \leq 47 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \leq 66 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	23	31	32	20
2		11	16	24
3			15	18
4				22

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

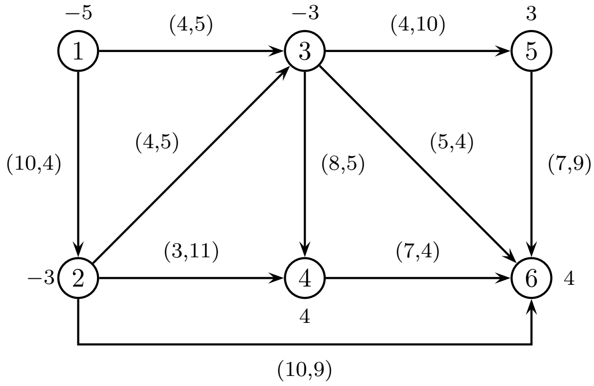
1–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{13}, x_{14}, x_{12}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

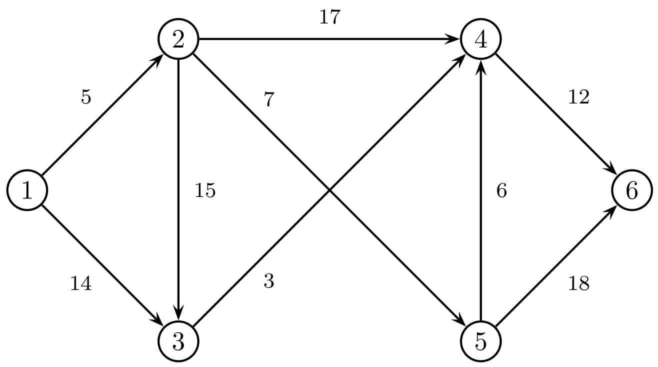


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,3) (3,4) (3,5) (5,6)	(1,3) (3,6)	$x =$		
(1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (3,5)	(3,4) (4,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

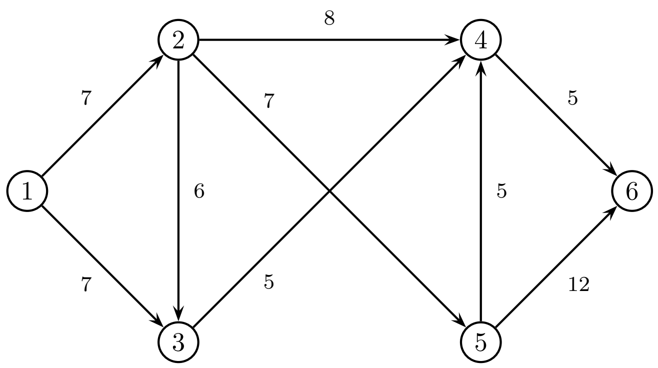
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)	
Archi di U	(1,2) (3,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1. Variabili decisionali:

$$\begin{cases} x_1 = \text{numero di autovetture classic prodotte} \\ x_2 = \text{numero di autovetture elegance prodotte} \\ x_3 = \text{numero di autovetture sport prodotte} \end{cases}$$

Modello:

$$\begin{cases} \max\ 10000x_1 + 15000x_2 + 22000x_3 \\ 20x_1 + 30x_2 + 62x_3 \leq 480 \\ 31x_1 + 42x_2 + 51x_3 \leq 480 \\ 16x_1 + 81x_2 + 10x_3 \leq 300 \\ x_3 \leq 0.2(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (-2,\ 0)$	SI	SI
$\{1, 5\}$	$y = (-8,\ 0,\ 0,\ 0,\ -9,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2, 6\}$	$(-2,\ 0)$	$(0,\ -19,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10)$	2	0, 1	1
2° iterazione	$\{1, 6\}$	$(-2,\ 0)$	$(19,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -9)$	6	2	3

Esercizio 4.

a) sol. ottima del rilassamento $= \left(\dfrac{47}{12}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 70$

b) sol. ammissibile $= (3, 0)$ $\qquad v_I(P) = 54$

c)

$r = 1 \qquad x_1 \leq 3$

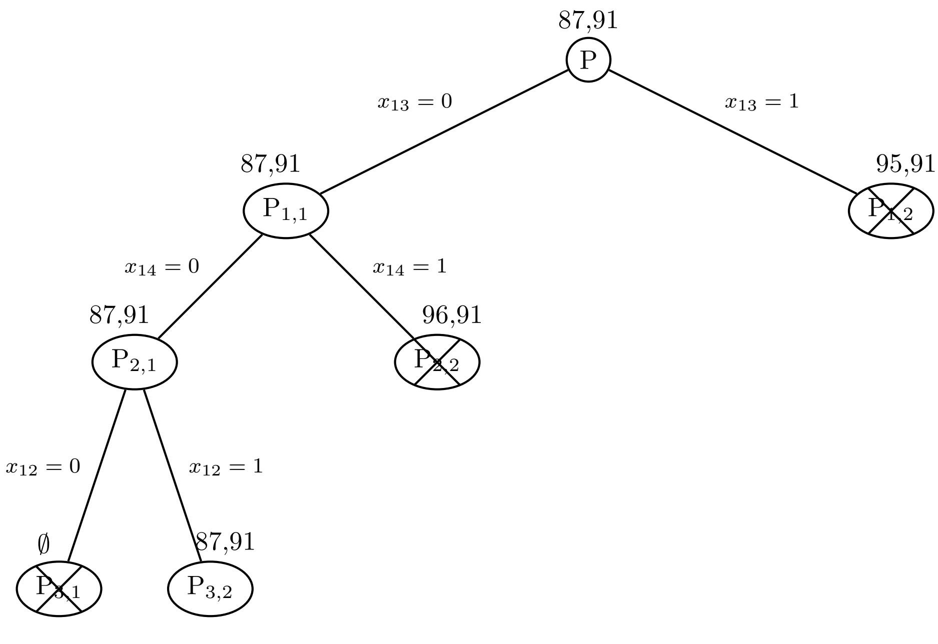
$r = 4 \qquad 6\,x_1 + 5\,x_2 \leq 23$

Esercizio 5.

a) 1–albero: (1 , 2) (1 , 5) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 87$

b) ciclo: 4 – 3 – 2 – 1 – 5 $\qquad v_S(P) = 91$

c)



Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,3) (3,4) (3,5) (5,6)	(1,3) (3,6)	$x = (0,\ 5,\ 3,\ 0,\ 0,\ 4,\ 3,\ 4,\ 0,\ 0)$	SI	SI
(1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (3,5)	(3,4) (4,6)	$\pi = (0,\ 0,\ 4,\ 3,\ 8,\ 10)$	NO	SI

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)	(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)
Archi di U	(1,2) (3,4)	(3,4)
x	(4, 1, 4, 3, 0, 5, 3, 0, 4, 0)	(0, 5, 0, 3, 0, 5, 3, 0, 4, 0)
π	(0, 0, 4, 3, 8, 10)	(0, 0, 4, 3, 8, 10)
Arco entrante	(1,2)	(3,4)
ϑ^+, ϑ^-	4 , 4	8 , 0
Arco uscente	(1,2)	(2,3)

Esercizio 8.

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		5		3		4		6	
nodo 2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 3	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 4	$+\infty$	-1	22	2	18	5	17	3	17	3	17	3
nodo 5	$+\infty$	-1	12	2	12	2	12	2	12	2	12	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	5	30	5	29	4	29	4
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		3, 4, 6		4, 6		6		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 4 - 6	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 6	2	(7, 0, 0, 5, 2, 0, 5, 0, 2)	7
1 - 3 - 4 - 2 - 5 - 6	5	(7, 5, 0, 0, 7, 5, 5, 0, 7)	12

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $N_t = \{2, 4, 5, 6\}$