

(Cognome)

(Nome)

(Matricola)

**Esercizio 1.** Una ditta produce hamburger di due qualità: A e B. 10 kg di prodotto di tipo A si ricavano da 5 kg di tritato di carne, 1 kg di uova, 2 kg di farina e 2 kg di pangrattato. Produrre 10 kg del tipo B richiede, invece, 8 kg di tritato di carne, 0.5 kg di uova, 1 kg di farina e 0.5 kg di pangrattato. Le scorte di materia prima della ditta sono 600 kg di tritato di carne, 500 kg di uova, 200 kg di farina e 100 kg di pangrattato. Sapendo che i profitti ricavati dalla vendita di 1 kg di hamburger di tipo A e B sono rispettivamente di 10 Euro e 12 Euro, determinare quanti kg di hamburger di tipo A e B deve produrre la ditta in modo da massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

**Esercizio 2.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max -8 x_1 - 7 x_2 \\ -2 x_1 + x_2 \leq 4 \\ -2 x_1 - x_2 \leq 8 \\ 2 x_1 + x_2 \leq -4 \\ x_1 \leq -1 \\ -x_2 \leq 4 \\ -x_1 \leq 3 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 6}	$x =$		
{3, 6}	$y =$		

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	$x$	$y$	Indice uscite	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,4}					
2° iterazione						

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max & 15 x_1 + 8 x_2 \\ & 14 x_1 + 11 x_2 \leq 68 \\ & 6 x_1 + 15 x_2 \leq 64 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$
--------------------------------	------------

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$
--------------------	------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

r =	taglio:
-----	---------

**Esercizio 5.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
<b>1</b>	18	17	26	21
<b>2</b>		20	13	14
<b>3</b>			16	28
<b>4</b>				15

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5-albero di costo minimo.

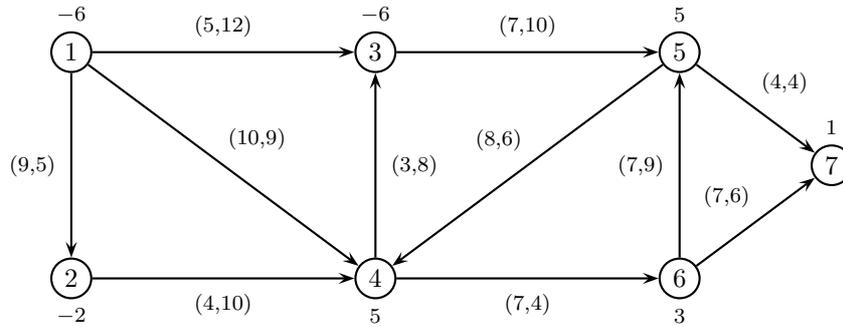
5-albero:	$v_I(P) =$
-----------	------------

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo:	$v_S(P) =$
--------	------------

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{45}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{35}$ .

**Esercizio 6.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

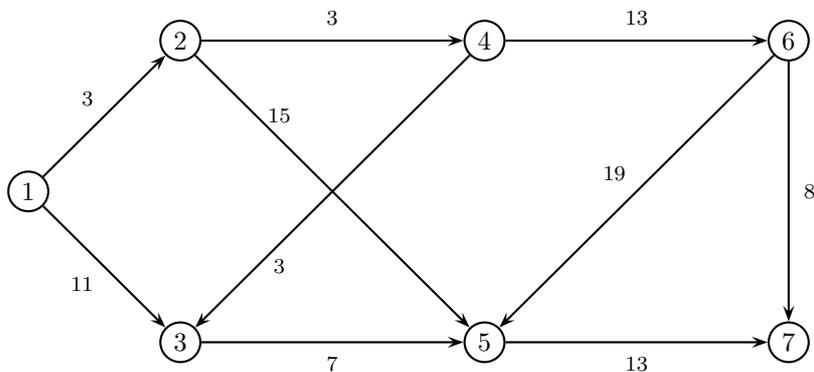


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
(1,2) (2,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3) (6,5)	$x =$		
(1,2) (1,3) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,4) (5,4)	$\pi = (0,$		

**Esercizio 7.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

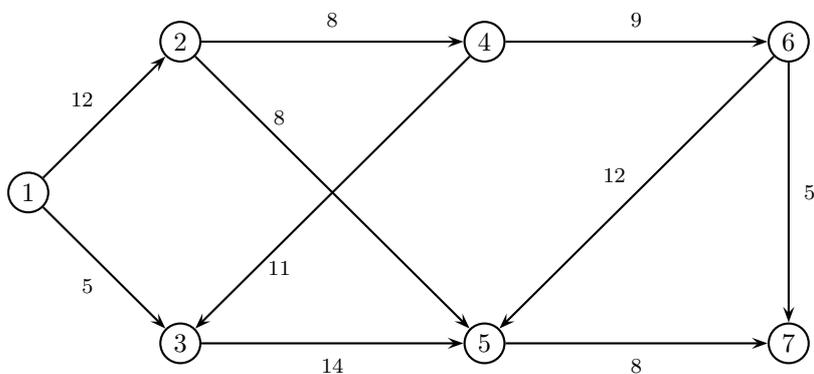
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(1,2) (4,6)	
$x$		
$\pi$		
Arco entrante		
$\vartheta^+, \vartheta^-$		
Arco uscente		

**Esercizio 8.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	$\pi$	$p$												
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme $Q$														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	$\delta$	$x$	$v$

Taglio di capacità minima:  $N_s =$

$N_t =$

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Variabili decisionali:  $x_1 = \text{kg di hamburger A}$ ,  $x_2 = \text{kg di hamburger B}$ .

Modello:

$$\begin{cases} \max 10x_1 + 12x_2 \\ 0.5x_1 + 0.8x_2 \leq 600 \\ 0.1x_1 + 0.05x_2 \leq 500 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 200 \\ 0.2x_1 + 0.05x_2 \leq 100 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 2.**

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 6}	$x = (-3, -2)$	SI	SI
{3, 6}	$y = (0, 0, -7, 0, 0, -6)$	NO	NO

**Esercizio 3.**

	Base	$x$	$y$	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3, 4}	$(-1, -2)$	$(0, 0, -7, 6, 0, 0)$	3	4, 2	5
2° iterazione	{4, 5}	$(-1, -4)$	$(0, 0, 0, -8, 7, 0)$	4	3, 1, 2	2

**Esercizio 4.**

a) sol. ottima del rilassamento =  $\left(\frac{34}{7}, 0\right)$   $v_S(P) = 72$

b) sol. ammissibile =  $(4, 0)$   $v_I(P) = 60$

c)

$r = 1$   $x_1 \leq 4$

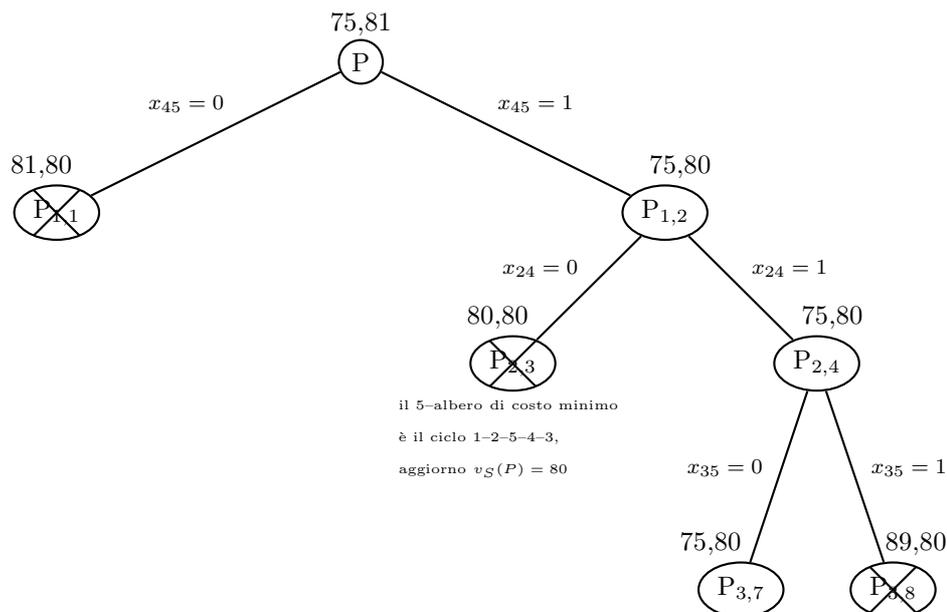
$r = 4$   $4x_1 + 3x_2 \leq 19$

**Esercizio 5.**

a) 5-albero:  $(1, 3) (2, 4) (2, 5) (3, 4) (4, 5)$   $v_I(P) = 75$

b) ciclo:  $3 - 4 - 2 - 5 - 1$   $v_S(P) = 81$

c)



**Esercizio 6.**

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
(1,2) (2,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,3) (6,5)	$x = (-6, 12, 0, -4, 0, -18, 9, 0, 4, 9, -3)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,4) (5,4)	$\pi = (0, 9, 5, 2, 12, 9, 16)$	NO	SI

**Esercizio 7.**

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	(1,4) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)
Archi di U	(1,2) (4,6)	(1,2) (4,6)
$x$	(5, 1, 0, 7, 7, 0, 4, 2, 1, 1, 0)	(5, 0, 1, 7, 6, 0, 4, 1, 1, 1, 0)
$\pi$	(0, 16, 5, 20, 12, 5, 16)	(0, 6, -5, 10, 2, -5, 6)
Arco entrante	(1,4)	(1,2)
$\vartheta^+, \vartheta^-$	9, 1	8, 5
Arco uscente	(1,3)	(1,2)

**Esercizio 8.**

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$
nodo visitato	1		2		4		3		5		6		7	
nodo 2	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 3	11	1	11	1	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4
nodo 4	$+\infty$	-1	6	2	6	2	6	2	6	2	6	2	6	2
nodo 5	$+\infty$	-1	18	2	18	2	16	3	16	3	16	3	16	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	19	4	19	4	19	4	19	4	19	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	5	27	6	27	6
insieme $Q$	2, 3		3, 4, 5		3, 5, 6		5, 6		6, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	$\delta$	$x$	$v$
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 8, 0, 0)	8
1 - 2 - 4 - 6 - 7	4	(12, 0, 4, 8, 0, 0, 4, 8, 0, 4)	12
1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 6 - 7	1	(12, 1, 5, 7, 1, 0, 5, 8, 0, 5)	13

Taglio di capacità minima:  $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$      $N_t = \{7\}$