Esame di Ricerca Operativa del 11/02/2015

______________________ **(Cognome)** ______________________ **(Nome)** ______________________ **(Matricola)**

Esercizio 1. Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 50 operai in A e 60 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

TV	32"	40"	50"	55"
Stabilimento A	1.3	1.4	1.6	1.8
Stabilimento B	1.4	1.6	1.9	2.1
Richiesta	1000	800	500	300

Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 700, 900, e 1300 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 5\ y_1 + 12\ y_3 + 12\ y_4 - 2\ y_5 + 5\ y_6 \\ -y_1 - 2\ y_3 - y_4 + y_5 - y_6 = -1 \\ -y_2 + y_3 + 2\ y_4 - y_6 = 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{5, 6}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2,4}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 7\,x_1 + 14\,x_2 \\ 15\,x_1 + 5\,x_2 \geq 56 \\ 9\,x_1 + 12\,x_2 \geq 43 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 5. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	25	21	28	23
2		20	27	30
3			7	11
4				19

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

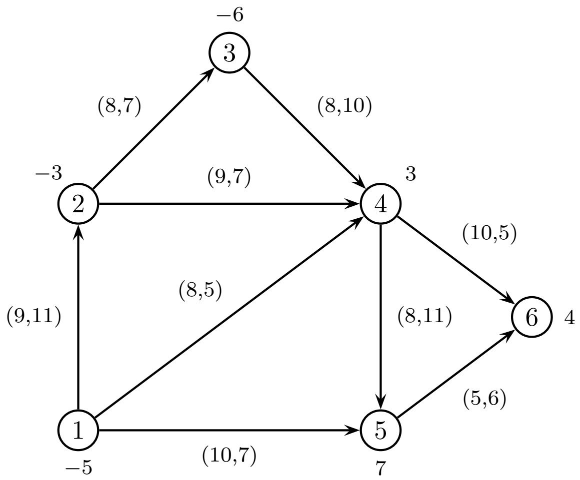
3–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{35}, x_{45}.

Esercizio 6. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

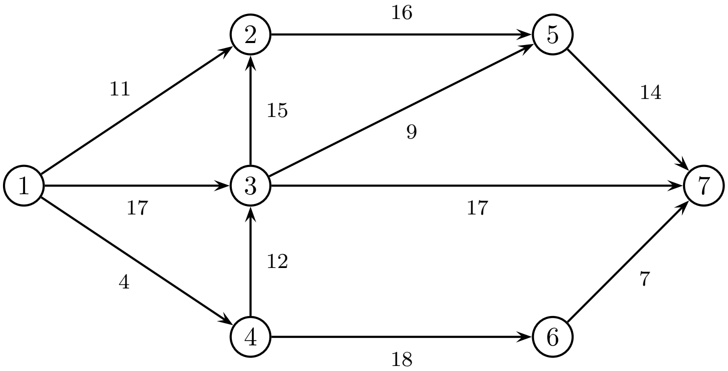


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (3,4) (4,5) (5,6)	(1,4)	$x =$		
(1,2) (1,4) (2,3) (4,5) (4,6)	(1,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 7. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 6.

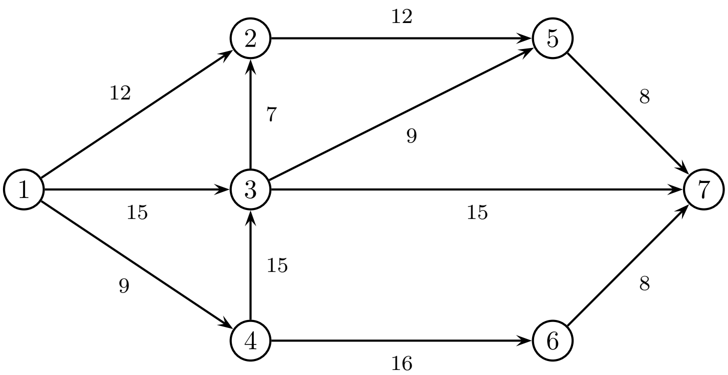
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (5,6)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 8. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

SOLUZIONI

Esercizio 1.
variabili decisionali: x_{ij} = numero di TV di tipo i prodotti nello stabilimento j, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A}+x_{1B}) + 700\,(x_{2A}+x_{2B}) + 900\,(x_{3A}+x_{3B}) + 1300\,(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.3\,x_{1A} + 1.4\,x_{2A} + 1.6\,x_{3A} + 1.8\,x_{4A} \leq 2000 \\ 1.4\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.9\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \leq 2400 \\ x_{1A} + x_{1B} \geq 1000 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 800 \\ x_{3A} + x_{3B} \geq 500 \\ x_{4A} + x_{4B} \geq 300 \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 2.

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (-5,\ 0)$	SI	SI
$\{5,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -3,\ -2)$	NO	NO

Esercizio 3.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$(-12,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$	1	0, 1	2
2° iterazione	$\{1,\ 4\}$	$\left(-5,\ \frac{7}{2}\right)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$	3	0, 2	1

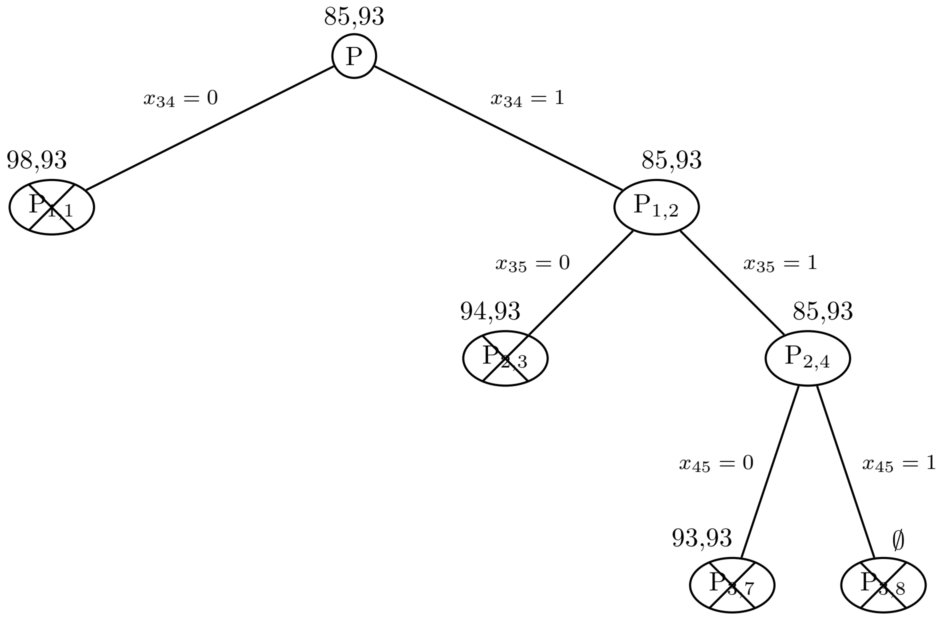
Esercizio 4.
a) sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{43}{9}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 34$
b) sol. ammissibile = $(5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 35$
c)
$r = 1 \qquad 8\,x_1 + 11\,x_2 \geq 39$
$r = 3 \qquad 3\,x_1 + 4\,x_2 \geq 15$

Esercizio 5.

a) 3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\quad v_I(P) = 85$

b) ciclo: 4 − 3 − 5 − 1 − 2 $\quad v_S(P) = 93$

c)



Il ciclo 4 − 3 − 5 − 1 − 2 è ottimo.

Esercizio 6.

Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (3,4) (4,5) (5,6)	(1,4)	$x = (0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 3,\ 6,\ 11,\ 0,\ 4)$	SI	SI
(1,2) (1,4) (2,3) (4,5) (4,6)	(1,5)	$\pi = (0,\ 9,\ 17,\ 8,\ 16,\ 18)$	SI	NO

Esercizio 7.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (5,6)	(1,5) (2,4) (3,4) (4,5) (5,6)
Archi di U	(2,4)	
x	(4, 0, 1, 0, 7, 6, 10, 0, 4)	(0, 0, 5, 0, 3, 6, 6, 0, 4)
π	(0, 9, −6, 2, 10, 15)	(0, −7, −6, 2, 10, 15)
Arco entrante	(2,4)	(4,6)
ϑ^+, ϑ^-	6 , 4	5 , 4
Arco uscente	(1,2)	(5,6)

Esercizio 8.

a)

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		6		5		7	
nodo 2	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 3	17	1	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	27	2	25	3	25	3	25	3	25	3
nodo 6	$+\infty$	-1	22	4	22	4	22	4	22	4	22	4	22	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	33	3	29	6	29	6	29	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 5, 6		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b)

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	15	(0, 15, 0, 0, 0, 0, 15, 0, 0, 0, 0)	15
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 15, 0, 8, 0, 0, 15, 0, 0, 8, 0)	23
1 - 4 - 6 - 7	8	(8, 15, 8, 8, 0, 0, 15, 0, 8, 8, 8)	31

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$