Esame di Ricerca Operativa del 24/07/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + 4\ x_2 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 6 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2\ x_2 \leq 14 \end{cases}$$

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,5}					
2° iterazione						

Esercizio 2. Una ditta produce travi in ferro del peso ciascuno di un chilogrammo. Il ferro con cui tali pezzi sono fatti deve contenere manganese e silicio: in particolare deve contenere più dello 0.45% di manganese, e tra il 3% e il 5.5% di silicio. Sono disponibili tre tipi di materiale ferroso con le seguenti caratteristiche:

Materiale ferroso	A	B	C
Silicio (%)	4.00	1.00	0.60
Manganese (%)	0.45	0.50	0.40
Costo (Euro / Kg)	0.025	0.03	0.018

Determinare la percentuale di materiale da utilizzare per produrre una trave, in modo da minimizzare il costo del materiale usato.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

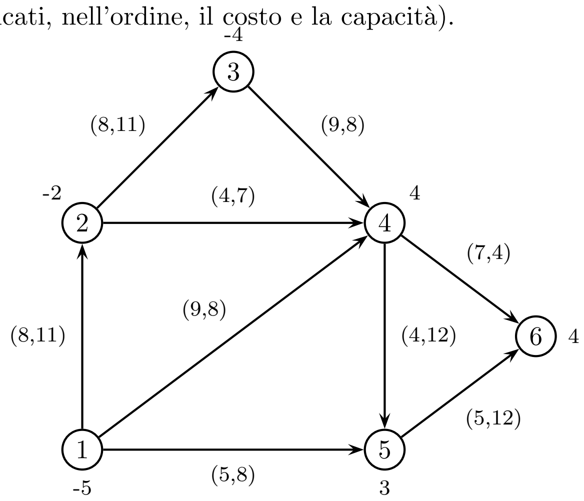
```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (2,3) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(3,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 8\ x_1 + 12\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 60 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

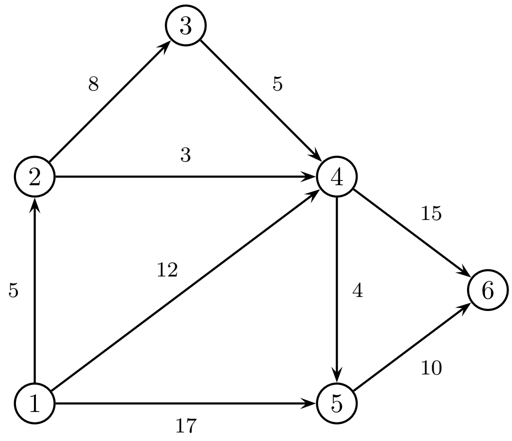
b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

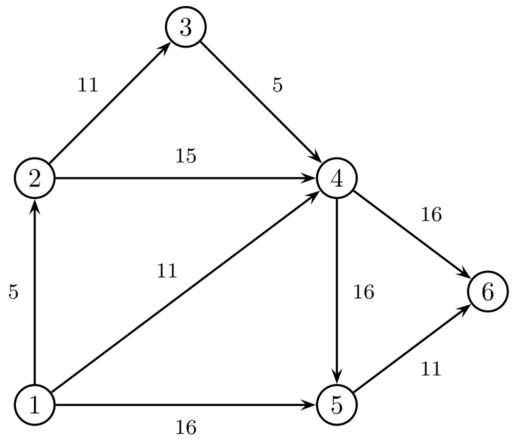
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	30	25	29	47
2		18	94	61
3			54	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema, istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{14}, x_{23} e dicendo se a questo punto é stato trovato l'ottimo o si dovrebbe proseguire.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 4 \leq 0, \quad -x_1 + x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}{5},\ -\frac{3\,\sqrt{2}\,\sqrt{5}}{5}\right)$							
$\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$							
$\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 3\,x_1 - 7\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-4,-5)$, $(0,5)$, $(-5,2)$ e $(2,4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(-2,-2)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(-1,\ 0)$	$\left(0,\ -\dfrac{13}{8},\ 0,\ 0,\ -\dfrac{15}{8},\ 0\right)$	2	$\dfrac{120}{7},\ 8,\ \dfrac{120}{7}$	4
2° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$(2,\ -2)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \dfrac{13}{5},\ -\dfrac{11}{5},\ 0\right)$	5	$35,\ 10$	3

Esercizio 2.

$x_A =$ percentuale di materiale A
$x_B =$ percentuale di materiale B
$x_C =$ percentuale di materiale C
$\min\ 0.025\ x_A + 0.03\ x_B + 0.018\ x_C$
$x_A + x_B + x_C = 1$
$0.04\ x_A + 0.01\ x_B + 0.006\ x_C \leq 0.055$
$0.04\ x_A + 0.01\ x_B + 0.006\ x_C \geq 0.03$
$0.0045\ x_A + 0.005\ x_B + 0.004\ x_C \geq 0.0045$
$x_A \geq 0$
$x_B \geq 0$
$x_C \geq 0$

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,5) (2,3) (4,5) (4,6)	(1,2) (1,5) (2,3) (3,4) (4,6)
Archi di U	(3,4)	
x	(2, 0, 3, 4, 0, 8, 0, 4, 0)	(2, 0, 3, 4, 0, 8, 0, 4, 0)
π	(0, 8, 16, 1, 5, 8)	(0, 8, 16, 25, 5, 32)
Arco entrante	(3,4)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	5 , 0	8 , 2
Arco uscente	(4,5)	(1,2)

Esercizio 4.

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\dfrac{51}{11}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 40$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 10\, x_1 + 12\, x_2 \geq 47$
$r = 3$ $\qquad 5\, x_1 + 6\, x_2 \geq 24$

Esercizio 5.

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		4		5		3		6	
nodo 2	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 3	$+\infty$	-1	13	2	13	2	13	2	13	2	13	2
nodo 4	12	1	8	2	8	2	8	2	8	2	8	2
nodo 5	17	1	17	1	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	4	22	5	22	5	22	5
insieme Q	2, 4, 5		3, 4, 5		3, 5, 6		3, 6		6		$\emptyset$	

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 4 - 6	11	(0, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 11, 0)	11
1 - 5 - 6	11	(0, 11, 11, 0, 0, 0, 0, 11, 11)	22
1 - 2 - 4 - 6	5	(5, 11, 11, 0, 5, 0, 0, 16, 11)	27

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 5\}$ $\quad N_t = \{2, 3, 4, 6\}$

Esercizio 6.

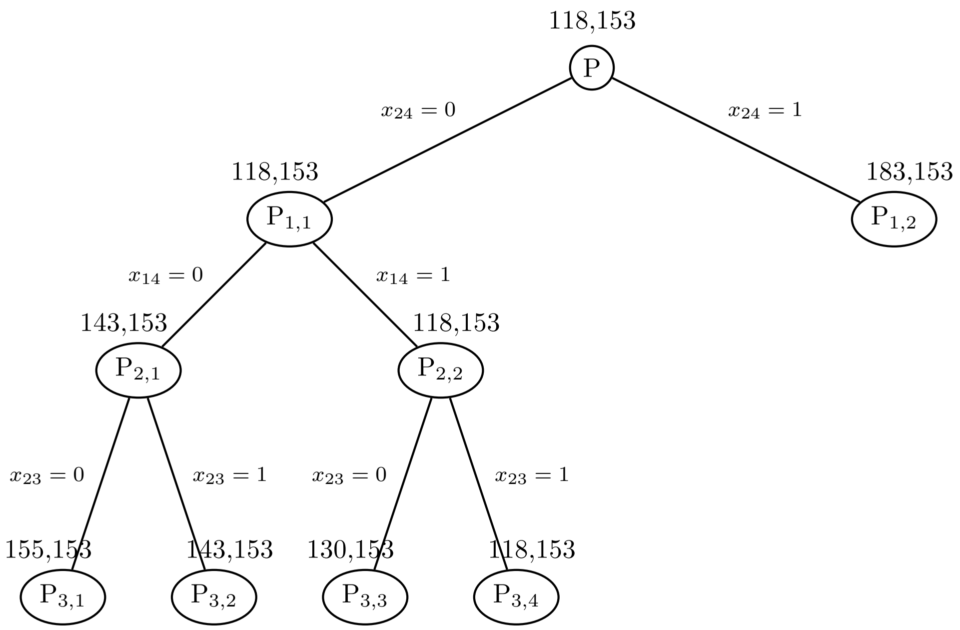
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 3) (1 , 4) (2 , 3) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 118$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: 5 – 4 – 1 – 3 – 2 $\qquad v_S(P) = 153$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{14}, x_{23} e dicendo se a questo punto é stato trovato l'ottimo o si dovrebbe proseguire.



Esercizio 7.

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5},\ -\frac{3\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 8.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(-2, -2)$	$(3, -2)$	$\begin{pmatrix} 4/13 & 6/13 \\ 6/13 & 9/13 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{58}{13}, -\frac{87}{13}\right)$	$\frac{13}{29}$	$\frac{13}{29}$	$(-4, -5)$