Esame di Ricerca Operativa del 23/02/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -7\,y_1 + 4\,y_2 + 12\,y_3 + 6\,y_4 - 5\,y_5 + 20\,y_6 + 13\,y_7 \\ -y_1 - 2\,y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + 3\,y_6 + 2\,y_7 = -9 \\ y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 2\,y_5 - y_6 = -7 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{3, 4}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce mattonelle in tre diversi stabilimenti (Pisa, Livorno, Pontedera) e li vende a tre imprese edili (A, B, C). Il costo di produzione delle mattonelle varia: la produzione costa 9 euro/kg nello stabilimento di Pisa, 10.5 euro/kg in quello di Livorno e 10 euro/kg in quello di Pontedera. Il costo (in euro) per spedire un kg di mattonelle da uno stabilimento ad un cliente è indicato nella seguente tabella:

	imprese edili		
stabilimento	A	B	C
Pisa	0.25	0.5	0.6
Livorno	0.3	0.2	0.1
Pontedera	0.5	0.3	0.2

I tre stabilimenti possono produrre al massimo 8500, 9200 e 11000 kg di mattonelle al mese. In base alle previsioni sulle vendite, la domanda mensile delle tre imprese edili è pari a 5000, 8300 e 6300 kg di mattonelle. Per bilanciare la produzione si richiede che la produzione nell'impianto con costo maggiore (quello di Livorno) sia almeno la metà della produzione nell'impianto di Pisa ed almeno un terzo della produzione nell'impianto di Pontedera. Determinare quanti kg di mattonelle deve produrre la ditta in ogni stabilimento in modo da minimizzare il costo totale.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

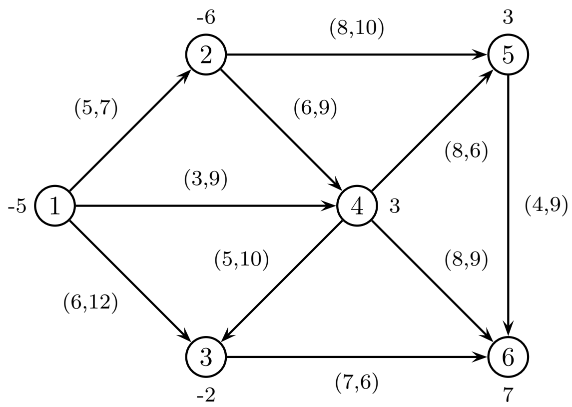
```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

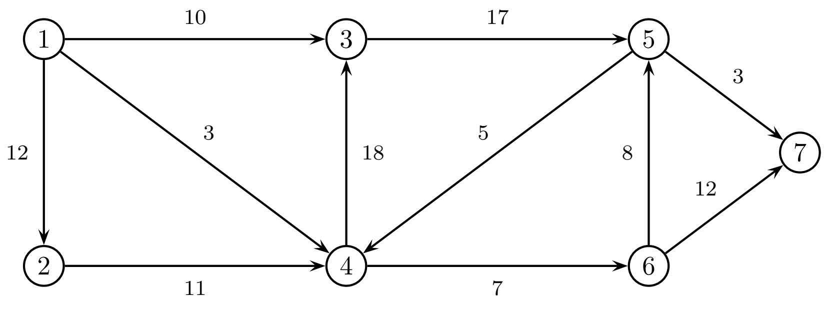


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,4) (4,5) (4,6)	(2,5)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,6) (4,5) (4,6)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

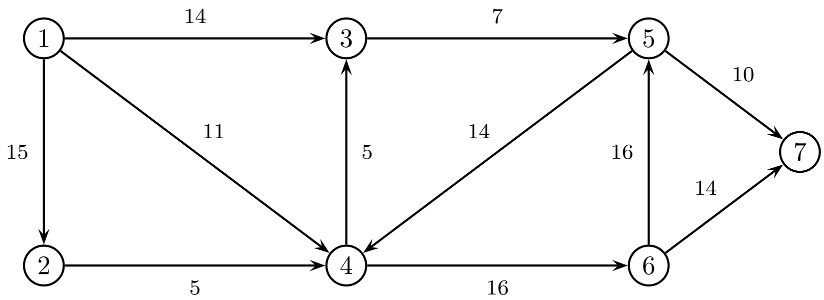
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (2,5) (4,3) (5,6)	
Archi di U	(3,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 12\ x_2 \\ 18\ x_1 + 11\ x_2 \leq 49 \\ 14\ x_1 + 17\ x_2 \leq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 589 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	12	13	11	7	9	17	20
Volumi	138	16	347	93	80	355	424

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(1,\ 0)$							
$(-1,\ 0)$							
$(0,\ 0)$							
$(0,\ 1)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\, x_1 x_2 - 3\, x_1 + 6\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(4, -5)$, $(1, -4)$, $(0, 2)$ e $(3, 0)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -7\ y_1 + 4\ y_2 + 12\ y_3 + 6\ y_4 - 5\ y_5 + 20\ y_6 + 13\ y_7 \\ -y_1 - 2\ y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + 3\ y_6 + 2\ y_7 = -9 \\ y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 2\ y_5 - y_6 = -7 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (1,\ -6)$	SI	NO
$\{3,\ 4\}$	$y = (0,\ 0,\ -1,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

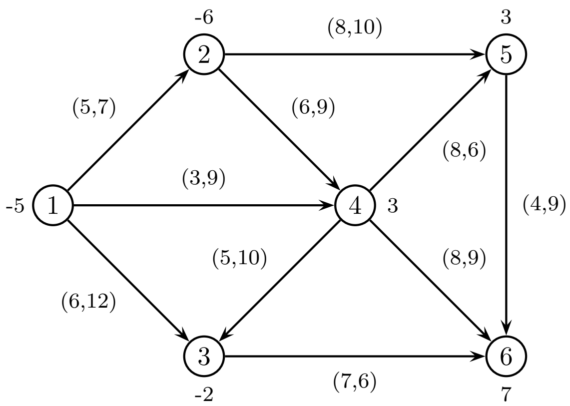
	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{2,\ 6\}$	$\left(\frac{16}{5},\ -\frac{52}{5}\right)$	$(0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$	3	$15,\ \frac{5}{3}$	6
2° iterazione	$\{2,\ 3\}$	$\left(\frac{8}{3},\ -\frac{28}{3}\right)$	$\left(0,\ \frac{16}{3},\ \frac{5}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$	4	$8,\ 5$	3

Esercizio 3. Variabili decisionali: numerati con 1, 2 e 3 gli stabilimenti, e numerati con 1, 2 e 3 i clienti, indichiamo con x_{ij} la quantità di vernice prodotta dall'impianto i per il cliente j.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 9.25\ x_{11} + 9.5\ x_{12} + 9.6\ x_{13} + 10.8\ x_{21} + 10.7\ x_{22} + 10.6\ x_{23} + 10.5\ x_{31} + 10.3\ x_{32} + 10.2\ x_{33} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 8500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 9200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 11000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 5000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 8300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 6300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq (x_{11} + x_{12} + x_{13})/2 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq (x_{31} + x_{32} + x_{33})/3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

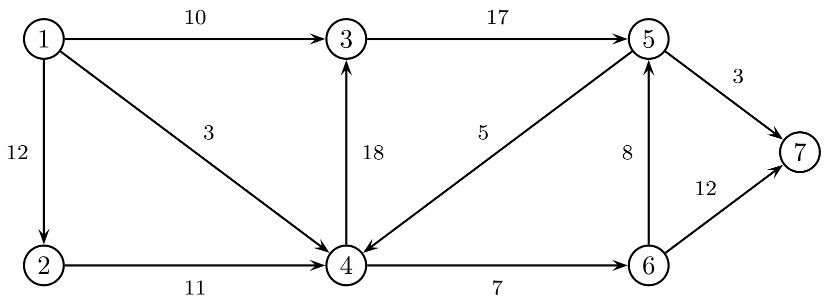


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,4) (4,5) (4,6)	(2,5)	$x = (7,\ -2,\ 0,\ 3,\ 10,\ 0,\ 0,\ -7,\ 7,\ 0)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,6) (4,5) (4,6)	(1,4)	$\pi = (0,\ 5,\ 6,\ 5,\ 13,\ 13)$	SI	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

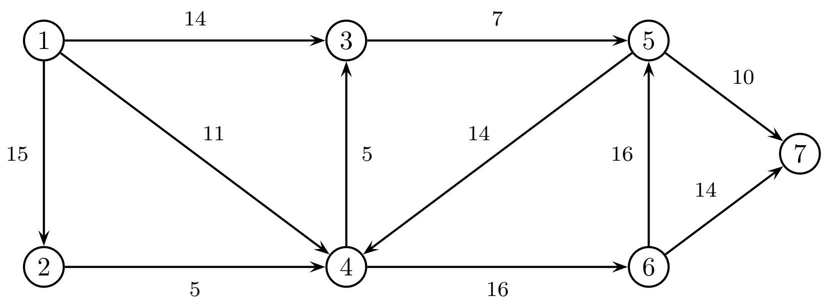
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (2,5) (4,3) (5,6)	(1,2) (1,3) (2,4) (2,5) (5,6)
Archi di U	(3,6)	(3,6)
x	(5, 0, 0, 7, 4, 6, 4, 0, 0, 1)	(1, 4, 0, 3, 4, 6, 0, 0, 0, 1)
π	(0, 5, 16, 11, 13, 17)	(0, 5, 6, 11, 13, 17)
Arco entrante	(1,3)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	12 , 4	9 , 1
Arco uscente	(4,3)	(1,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		6		2		5		7	
nodo 2	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 3	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
nodo 4	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	27	3	18	6	18	6	18	6	18	6
nodo 6	$+\infty$	-1	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	22	6	22	6	21	5	21	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6		2, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 4 - 6 - 7	11	(0, 7, 11, 0, 7, 0, 11, 0, 7, 0, 11)	18
1 - 2 - 4 - 6 - 7	3	(3, 7, 11, 3, 7, 0, 14, 0, 7, 0, 14)	21
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	2	(5, 7, 11, 5, 7, 0, 16, 0, 9, 2, 14)	23

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3\}$ $\quad N_t = \{4, 5, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\, x_1 + 12\, x_2 \\ 18\, x_1 + 11\, x_2 \le 49 \\ 14\, x_1 + 17\, x_2 \le 51 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{34}{19}, \frac{29}{19}\right)$ $\qquad v_S(P) = 36$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 22$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 15\, x_1 + 17\, x_2 \le 52$

$r = 2$ $\qquad 9\, x_1 + 6\, x_2 \le 25$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 589 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	12	13	11	7	9	17	20
Volumi	138	16	347	93	80	355	424

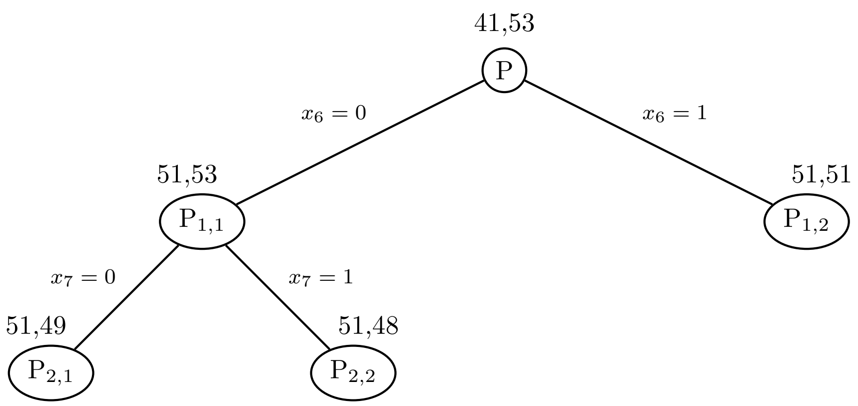
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$ $\qquad v_I(P) = 41$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(1, 1, 0, 1, 1, \frac{262}{355}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 53$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima = $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ $\qquad$ valore ottimo = 51

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad -x_2 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(1,\ 0)$	$(1,4)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(-1,\ 0)$	$(1,4)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ 0)$	$(0,4)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ 1)$	$(-1,0)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1\, x_2 - 3\ x_1 + 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(4,-5)$, $(1,-4)$, $(0,2)$ e $(3,0)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(2, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{-17}{3} x_1 - 2\, x_2$	(3 ,0)	$\left(1, -\frac{2}{3}\right)$	$\dfrac{13}{16}$	$\left(\dfrac{45}{16}, \dfrac{1}{8}\right)$