Esame di Ricerca Operativa del 23/02/16

(Cognome)	**(Nome)**	**(Corso di laurea)**

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq -13 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 21 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{2, 3\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce 3 tipi di composti chimici A,B e C. Per comporre B e C utilizza un solvente, 0.25 kg per ogni chilo prodotto di B e 0.50 kg. per ogni chilo di C, che può acquistare al prezzo di 5 euro al kg fino ad un massimo di 1000 kg. I costi di manodopera ed il prezzo di vendita sono rispettivamente 12 e 25 per A, 5 e 20 per B, 4 e 30 per C. Determinare la produzione ottima sapendo che di A bisogna produrne almeno il doppio di B e non più di C

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

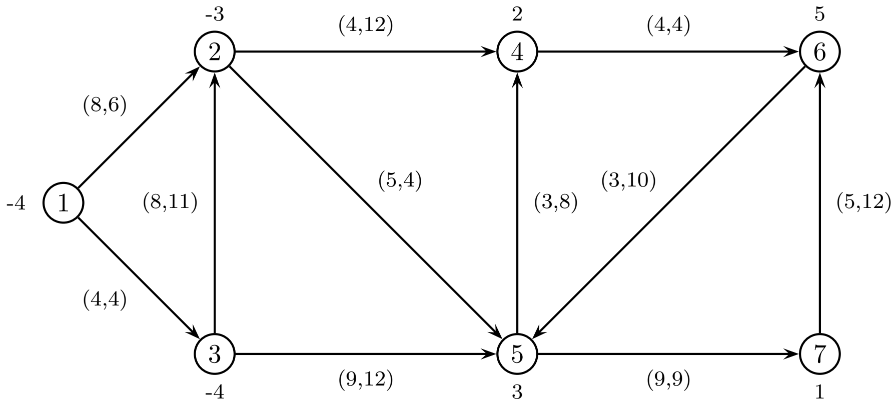
```
c=

A=                                        b=

Aeq=                                      beq=

lb=                                       ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

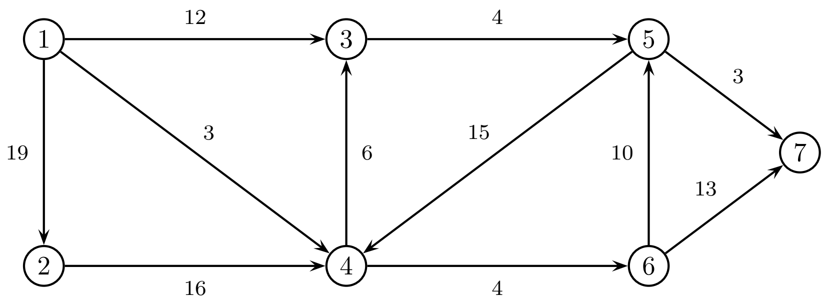


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,2)	$x =$		
(1,2) (2,4) (3,5) (5,4) (6,5) (7,6)	(4,6)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

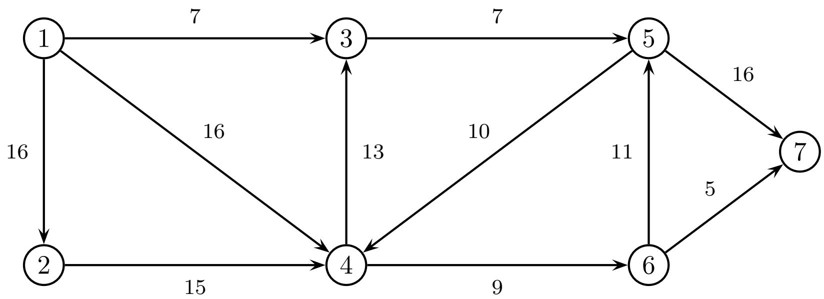
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6)	
Archi di U	(4,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 12\ x_2 \\ 16\ x_1 + 12\ x_2 \leq 63 \\ 10\ x_1 + 13\ x_2 \leq 44 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 518 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	10	17	7	22	18	24
Volumi	142	52	246	357	200	447	20

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 2)$							
$(2,\ 0)$							
$\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$							
$(1,\ 1)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 - 2\,x_2^2 + 5\,x_1 + 3\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(3,2)$, $(3,-4)$, $(1,-5)$ e $(-1,-2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(3,0)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq -13 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 21 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (1,\ 6)$	SI	NO
$\{2, 3\}$	$y = \left(0,\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4, 5\}$	$(4,\ 7)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{4},\ \frac{1}{4},\ 0\right)$	4	4	2
2° iterazione	$\{2, 5\}$	$(3,\ 5)$	$\left(0,\ \frac{7}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0\right)$	5	$5,\ \frac{20}{3}$	1

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

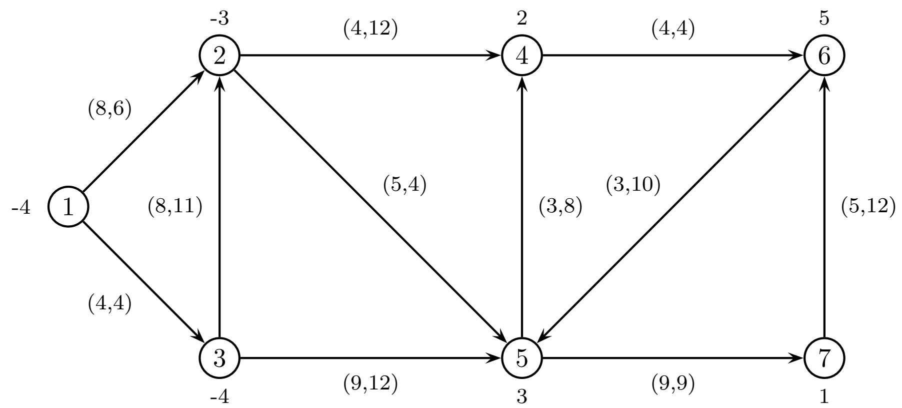
```
c=[ -13 ; -13.75 ; -23.5 ]

A=[ 0 0.25 0.5 ; -1 2 0 ; 1 0 -1 ]          b=[ 1000 ; 0 ; 0 ]

Aeq=[]                                      beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0]                              ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

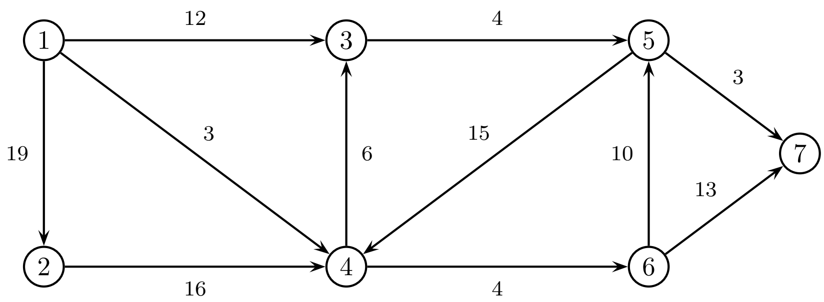


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,2)	$x = (6,\ -2,\ 0,\ 0,\ -9,\ 11,\ 6,\ 8,\ 0,\ 0,\ -1)$	NO	SI
(1,2) (2,4) (3,5) (5,4) (6,5) (7,6)	(4,6)	$\pi = (0,\ 8,\ 0,\ 12,\ 9,\ 6,\ 1)$	NO	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

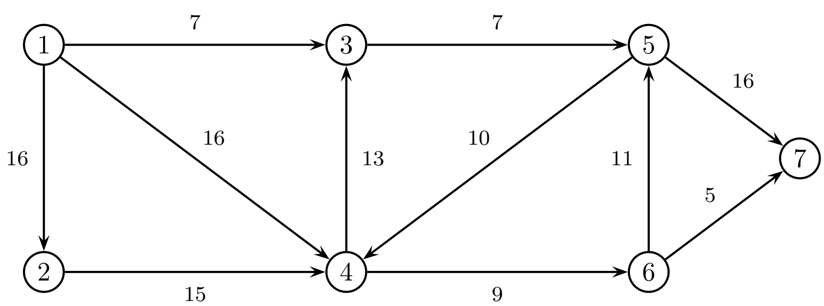
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6)	(1,3) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6)
Archi di U	(4,6)	(4,6)
x	(0, 4, 0, 3, 0, 8, 4, 6, 2, 0, 1)	(0, 4, 3, 0, 0, 8, 4, 3, 2, 0, 1)
π	(0, 8, 4, 16, 13, 27, 22)	(0, 12, 4, 16, 13, 27, 22)
Arco entrante	(2,4)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	12 , 3	6 , 3
Arco uscente	(2,5)	(5,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		3		5		7		2	
nodo 2	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 3	12	1	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9	4
nodo 4	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	17	6	13	3	13	3	13	3	13	3
nodo 6	$+\infty$	-1	7	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	6	20	6	16	5	16	5	16	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 5, 7		2, 5, 7		2, 7		2		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 4 - 6 - 7	5	(0, 7, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 5)	12
1 - 4 - 6 - 5 - 7	4	(0, 7, 9, 0, 7, 0, 9, 0, 11, 4, 5)	16

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 12\ x_2 \\ 16\ x_1 + 12\ x_2 \leq 63 \\ 10\ x_1 + 13\ x_2 \leq 44 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{44}{13}\right)$ $\qquad v_S(P) = 40$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $\qquad v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2 \qquad x_2 \leq 3$
$r = 3 \qquad x_2 \leq 3$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 518 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	10	17	7	22	18	24
Volumi	142	52	246	357	200	447	20

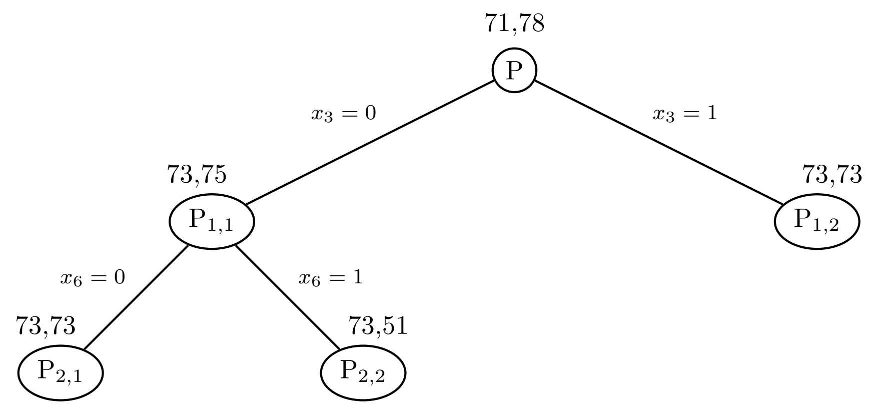
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 71$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, \dfrac{52}{123}, 0, 1, 0, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 78$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 73$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ 2)$	$(5,8)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(2,\ 0)$	$(5,8)$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$	$(1,0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(1,\ 1)$	$(0,-2)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1^2 - 4\ x_1\, x_2 - 2\ x_2^2 + 5\ x_1 + 3\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(3,2)$, $(3,-4)$, $(1,-5)$ e $(-1,-2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(3,0)$	$29\,x_1 - 9\,x_2$	(3 ,-4)	$(0,-4)$	$\dfrac{9}{16}$	$\left(3,-\dfrac{9}{4}\right)$