

(Cognome)

(Nome)

(Numero di Matricola)

**Esercizio 1.** Un'azienda informatica produce tre tipi di processori  $P_1, P_2, P_3$  nelle sedi  $S_1, S_2, S_3$ . La capacità di produzione settimanale delle sedi  $S_1, S_2, S_3$  è data da 1200, 800 e 1400 processori rispettivamente, ed il costo di produzione di un singolo processore di tipo  $P_i$  nello stabilimento  $S_j$  è dato da  $c_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ . Sapendo che la produzione settimanale deve essere di almeno 750 processori per ogni tipo e che la produzione dei processori di tipo  $P_1$  nella sede  $S_3$  deve essere inferiore al 60% della produzione dei processori di tipo  $P_1$  nelle sedi  $S_1$  ed  $S_2$ , si scriva un problema di programmazione lineare per determinare la quantità di processori da produrre settimanalmente in ciascuna sede in modo da minimizzare il costo complessivo di produzione.

variabili decisionali:

modello:

**Esercizio 2.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

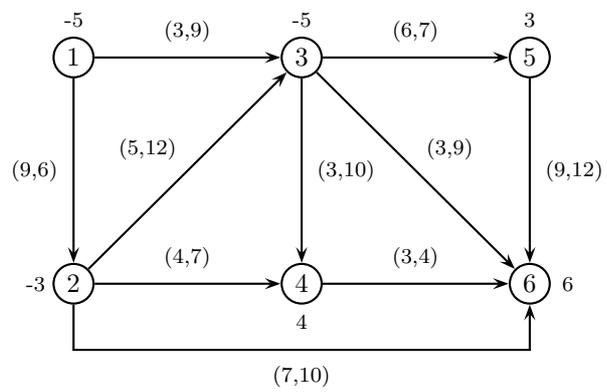
$$\begin{cases} \max & -4 x_1 - 7 x_2 \\ & -3 x_1 - 2 x_2 \leq 3 \\ & -x_1 \leq 1 \\ & 3 x_1 - 2 x_2 \leq 9 \\ & 3 x_1 + x_2 \leq 9 \\ & -x_1 + 3 x_2 \leq 7 \\ & 2 x_1 + x_2 \leq 16 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{2, 3}	$y =$		

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	$x$	$y$	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

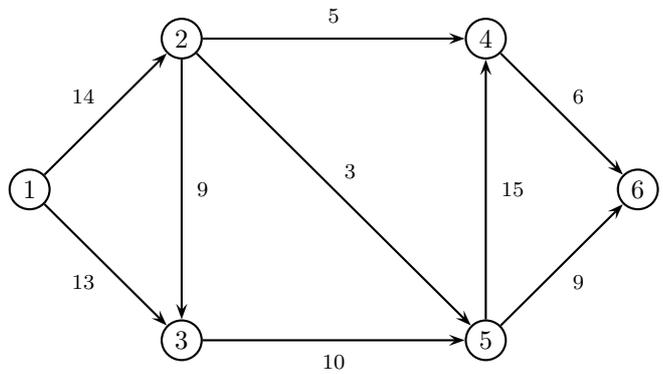


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	(5,6)	$x =$		
(1,2) (1,3) (2,6) (3,4) (5,6)	(2,4)	$\pi = (0,$		

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del semplice su reti per il problema dell'esercizio 4.

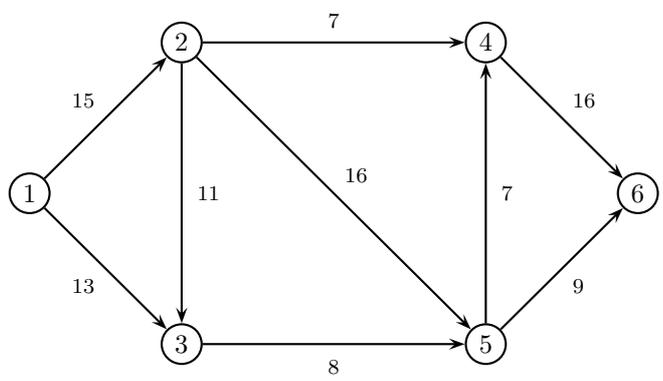
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6)	
Archi di U	(3,5)	
$x$		
$\pi$		
Arco entrante		
$\vartheta^+, \vartheta^-$		
Arco uscente		

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	$\pi$	$p$										
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme $Q$												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	$\delta$	$x$	$v$

Taglio di capacità minima:  $N_s =$   $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max 8 x_1 + 13 x_2 \\ 16 x_1 + 5 x_2 \leq 67 \\ 15 x_1 + 17 x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$
--------------------------------	------------

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$
--------------------	------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

r =	taglio:
-----	---------

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	18	23	66	46
2		17	93	60
3			12	15
4				9

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5-albero di costo minimo.

5-albero:	$v_I(P) =$
-----------	------------

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo:	$v_S(P) =$
--------	------------

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{34}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{45}$ .

# SOLUZIONI

## Esercizio 1.

Variabili decisionali:

$x_{ij}$  = quantità di processori di tipo  $P_i$  prodotti settimanalmente nelle sedi  $S_j$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;

Modello:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 1200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 800 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 1400 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 750 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 750 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 750 \\ x_{13} \leq 0.6(x_{11} + x_{12}) \\ x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

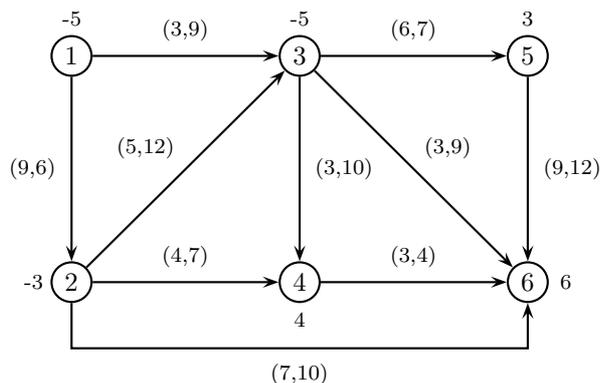
$$\begin{cases} \max -4x_1 - 7x_2 \\ -3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 1 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenera (si/no)
{1, 2}	$x = (-1, 0)$	SI	NO
{2, 3}	$y = \left(0, \frac{29}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 0\right)$	SI	NO

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	$x$	$y$	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4, 5}	(2, 3)	$\left(0, 0, 0, -\frac{19}{10}, -\frac{17}{10}, 0\right)$	4	$\frac{150}{11}, 10$	2
2° iterazione	{2, 5}	(-1, 2)	$\left(0, \frac{19}{3}, 0, 0, -\frac{7}{3}, 0\right)$	5	6, 24	1

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

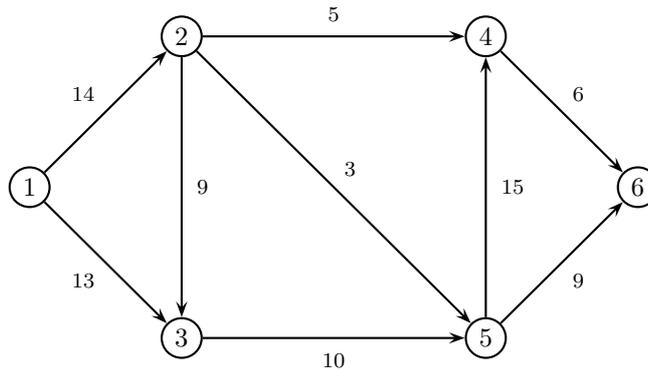


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenerare (si/no)
(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	(5,6)	$x = (-3, 8, 0, 0, 0, 4, 15, -6, 0, 12)$	NO	NO
(1,2) (1,3) (2,6) (3,4) (5,6)	(2,4)	$\pi = (0, 9, 3, 6, 7, 16)$	NO	NO

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

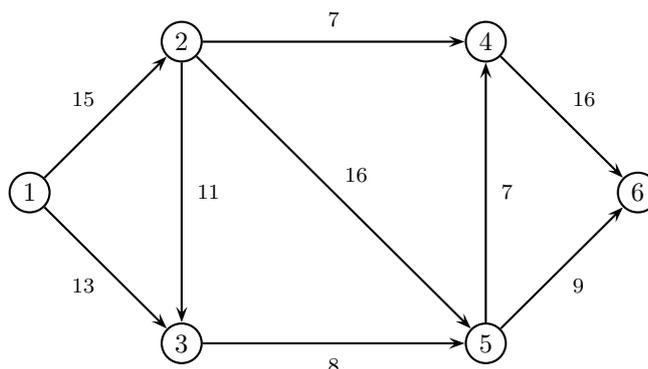
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6)	(1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
$x$	(5, 0, 2, 6, 0, 0, 7, 0, 2, 4)	(3, 2, 0, 6, 0, 0, 7, 0, 2, 4)
$\pi$	(0, 9, 14, 13, 7, 16)	(0, 9, 3, 13, 7, 16)
Arco entrante	(1,3)	(3,4)
$\vartheta^+, \vartheta^-$	9, 2	7, 3
Arco uscente	(2,3)	(1,2)

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$
nodo visitato	1		3		2		5		4		6	
nodo 2	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 3	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	19	2	19	2	19	2	19	2
nodo 5	$+\infty$	-1	23	3	17	2	17	2	17	2	17	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	5	25	4	25	4
insieme $Q$	2, 3		2, 5		4, 5		4, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	$\delta$	$x$	$v$
1 - 2 - 4 - 6	7	(7, 0, 0, 7, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 2 - 5 - 6	8	(15, 0, 0, 7, 8, 0, 7, 0, 8)	15
1 - 3 - 5 - 6	1	(15, 1, 0, 7, 8, 1, 7, 0, 9)	16
1 - 3 - 5 - 4 - 6	7	(15, 8, 0, 7, 8, 8, 14, 7, 9)	23

Taglio di capacità minima:  $N_s = \{1, 3\}$   $N_t = \{2, 4, 5, 6\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max 8x_1 + 13x_2 \\ 16x_1 + 5x_2 \leq 67 \\ 15x_1 + 17x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

$$\text{sol. ottima del rilassamento} = \left(0, \frac{63}{17}\right) \quad v_S(P) = 48$$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

$$\text{sol. ammissibile} = (0, 3) \quad v_I(P) = 39$$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$$\begin{array}{ll} r = 2 & x_2 \leq 3 \\ r = 3 & 5x_1 + 6x_2 \leq 22 \end{array}$$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	18	23	66	46
2		17	93	60
3			12	15
4				9

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5-albero di costo minimo.

$$\text{5-albero: } (1, 2) (2, 3) (3, 4) (3, 5) (4, 5) \quad v_I(P) = 71$$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

$$\text{ciclo: } 2 - 3 - 4 - 5 - 1 \quad v_S(P) = 102$$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{34}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{45}$ .

