Esame di Ricerca Operativa del 22/01/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda informatica produce tre tipi di processori P_1, P_2, P_3 nelle sedi S_1, S_2, S_3. La capacitá di produzione settimanale delle sedi S_1, S_2, S_3 é data da 1000, 700 e 1500 processori rispettivamente, ed il costo di produzione di un singolo processore di tipo P_i nello stabilimento S_j e' dato da c_{ij}, $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$. Sapendo che la produzione settimanale deve essere di almeno 900 processori per ogni tipo e che la produzione dei processori di tipo P_1 nella sede S_3 deve essere inferiore al 50% della produzione dei processori di tipo P_1 nelle sedi S_1 ed S_2, si scriva un problema di programmazione lineare per determinare la quantitá di processori da produrre settimanalmente in ciascuna sede in modo da minimizzare il costo complessivo di produzione.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

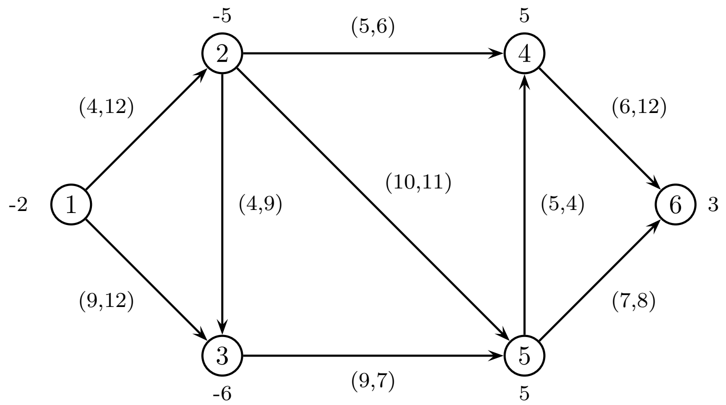
$$
\begin{cases}
\max\ -5\ x_1 + x_2 \\
3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 9 \\
3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\
-3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 3 \\
-x_1 + 3\ x_2 \leq 7 \\
-x_1 \leq 1 \\
-2\ x_1 - x_2 \leq 2
\end{cases}
$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 3}	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,6}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

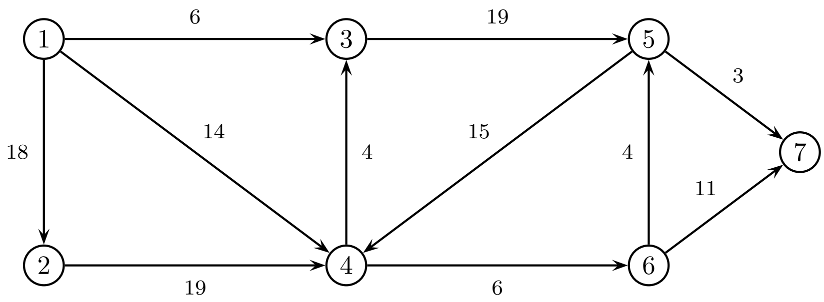


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,5) (3,5) (5,6)	(4,6)	$x =$		
(1,2) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4)	(2,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

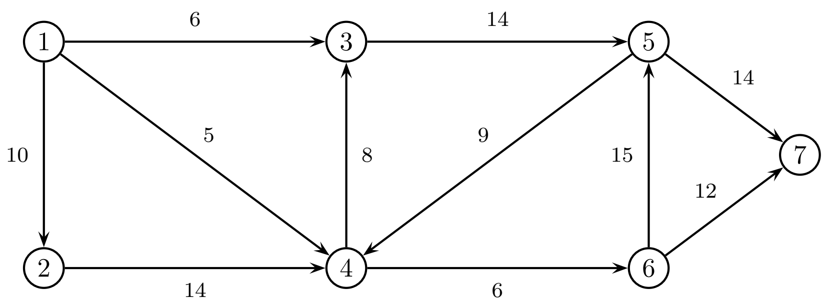
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (2,5) (3,5) (5,6)	
Archi di U	(5,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 6\ x_2 \\ 19\ x_1 + 10\ x_2 \leq 51 \\ 6\ x_1 + 15\ x_2 \leq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	17	22	65	45
2		16	92	59
3			11	14
4				8

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Variabili decisionali:
x_{ij} = quantita' di processori di tipo P_i prodotti settimanalmente nelle sedi S_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$;

Modello:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 700 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 1500 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 900 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 900 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 900 \\ x_{13} \leq 0.5\,(x_{11} + x_{12}) \\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

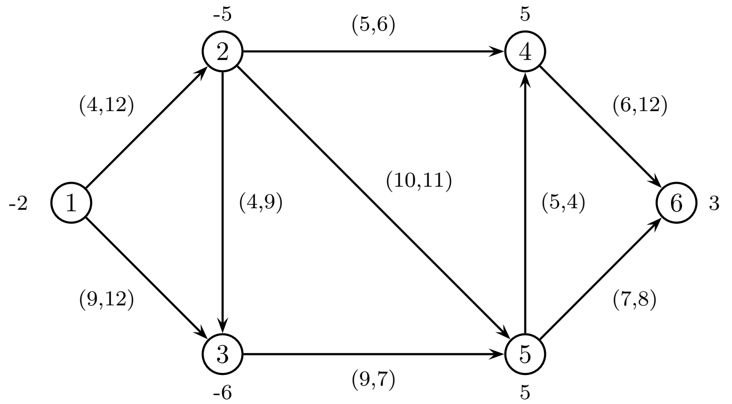
$$\begin{cases} \max\ -5\ x_1 + x_2 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 9 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 7 \\ -x_1 \leq 1 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ 0)$	SI	NO
$\{1,\ 3\}$	$y = \left(-\frac{13}{12},\ 0,\ \frac{7}{12},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\ 6\}$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ -7,\ 0,\ 0,\ 13)$	3	$\frac{6}{7},\ 0$	5
2° iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7,\ -1)$	6	$12,\ 2$	4

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

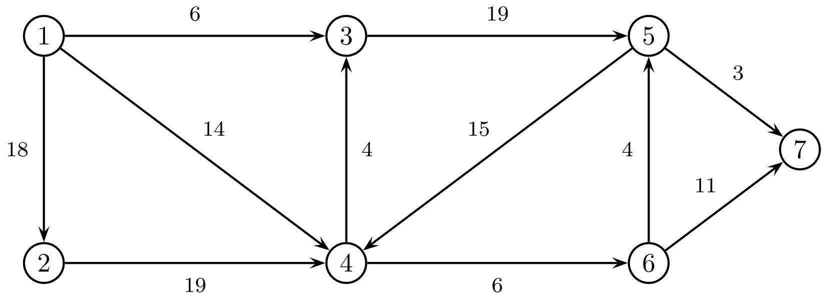


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (2,5) (3,5) (5,6)	(4,6)	$x = (2,\ 0,\ 0,\ 17,\ -10,\ 6,\ 12,\ 0,\ -9)$	NO	NO
(1,2) (2,3) (3,5) (4,6) (5,4)	(2,4)	$\pi = (0,\ 4,\ 8,\ 22,\ 17,\ 28)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

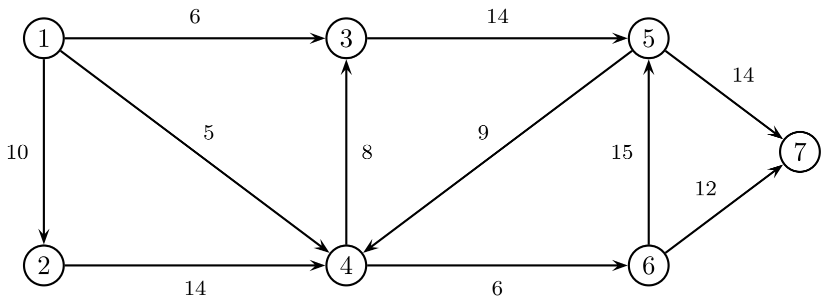
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (2,5) (3,5) (5,6)	(1,2) (2,4) (2,5) (3,5) (4,6)
Archi di U	(5,4)	(5,4)
x	(2, 0, 0, 1, 6, 6, 0, 4, 3)	(2, 0, 0, 4, 3, 6, 3, 4, 0)
π	(0, 4, 5, 9, 14, 21)	(0, 4, 5, 9, 14, 15)
Arco entrante	(4,6)	(5,4)
ϑ^+, ϑ^-	5 , 3	2 , 3
Arco uscente	(5,6)	(2,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		4		2		6		5		7	
nodo 2	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1
nodo 3	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 4	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 5	$+\infty$	-1	25	3	25	3	25	3	24	6	24	6	24	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	6	27	5	27	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5		2, 5, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 4 - 6 - 7	5	(0, 6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 6, 0, 5)	11
1 - 2 - 4 - 6 - 7	1	(1, 6, 5, 1, 6, 0, 6, 0, 6, 0, 6)	12
1 - 2 - 4 - 3 - 5 - 7	8	(9, 6, 5, 9, 14, 8, 6, 0, 14, 0, 6)	20

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 4\}$ $\quad N_t = \{3, 5, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\,x_1 + 6\,x_2 \\ 19\,x_1 + 10\,x_2 \le 51 \\ 6\,x_1 + 15\,x_2 \le 65 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{51}{19}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 37$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 0)$ $\qquad v_I(P) = 28$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \le 2$

$r = 4$ $\qquad 13\,x_1 + 6\,x_2 \le 34$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	17	22	65	45
2		16	92	59
3			11	14
4				8

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (2 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 66$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 $\qquad v_S(P) = 97$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24}, x_{45}.