Esame di Ricerca Operativa del 21/07/15

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + y_2 + 26\ y_3 + 13\ y_4 + 16\ y_5 + 17\ y_6 \\ -3\ y_1 - 5\ y_2 + 3\ y_3 - y_4 + 3\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -4\ y_1 - y_2 + 4\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 - 2\ y_6 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x =$		
$\{2,\ 4\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{3,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'azienda produce olio extravergine (E) e olio di oliva (O) i cui prezzi di vendita al chilo sono rispettivamente di 5.30 euro e di 3.95 euro. La produzione di olio richiede due tipi di olive (O1 e O2) che l'azienda acquista rispettivamente al costo di 2.40 euro/kg e 2.20 euro/kg. La manodopera è disponibile in al più 600 ore-uomo con un costo di 15 euro/ora. La tabella seguente indica i kg di olive e le ore di manodopera necessarie per la produzione di un litro di ciascun tipo di olio.

	O1	O2	manodopera
E	0.8	0.5	0.08
O	0.7	0.4	0.04

Sapendo che il budget disponibile per l'acquisto delle olive e della manodopera è pari a 110000 euro e supponendo che tutto l'olio prodotto sia venduto, si determini la produzione di olio EV e di olio OO che massimizzi il profitto dell'azienda.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

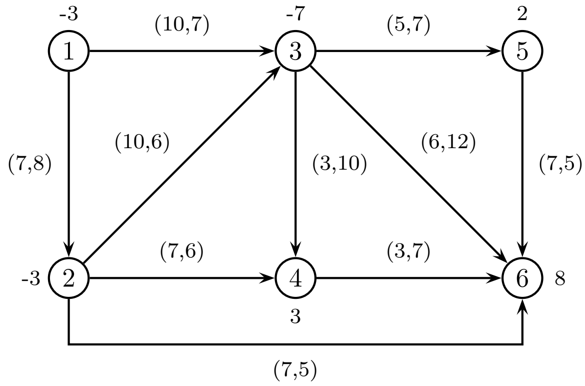
```
c=                                   intcon=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

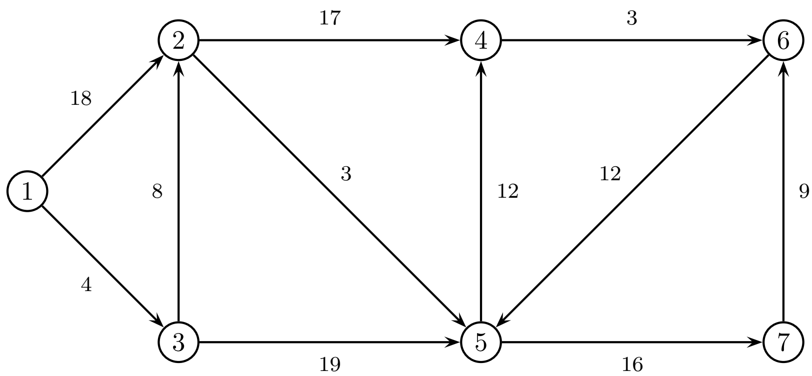


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (3,6) (4,6) (5,6)	(3,5)	$x =$		
(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)	(3,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

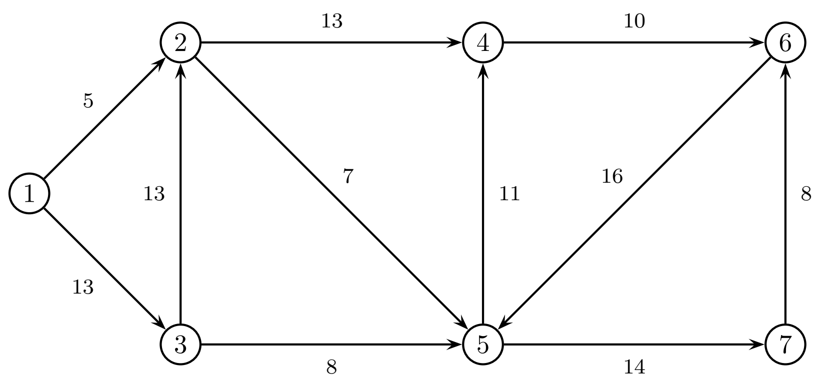
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5)	
Archi di U	(5,6)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 8\ x_2 \\ 19\ x_1 + 14\ x_2 \leq 69 \\ 12\ x_1 + 18\ x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{15}, x_{35}, x_{45}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 - 9 \le 0, \quad -x_1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 - 6\,x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1, 3)$, $(5, 3)$, $(2, -3)$ e $(-2, 1)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{11}{3}, 3\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + y_2 + 26\ y_3 + 13\ y_4 + 16\ y_5 + 17\ y_6 \\ -3\ y_1 - 5\ y_2 + 3\ y_3 - y_4 + 3\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -4\ y_1 - y_2 + 4\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 - 2\ y_6 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (0,\ -1)$	SI	NO
$\{2, 4\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$	SI	SI

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

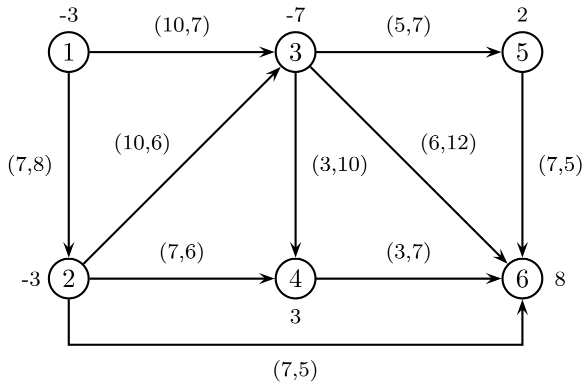
	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{3, 6\}$	$\left(-60,\ \frac{103}{2}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ \frac{13}{2}\right)$	2	$1,\ \frac{13}{17}$	6
2° iterazione	$\{2, 3\}$	$\left(-\frac{30}{17},\ \frac{133}{17}\right)$	$\left(0,\ \frac{13}{17},\ \frac{16}{17},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	4	$1,\ 1$	2

Esercizio 3.

$$\begin{cases} \max\ (5.3x_E + 3.95x_O) - (1.2x_E + 0.6x_O) - (1.92x_E + 1.68x_O) - (1.10x_E + 0.88x_O) \\ 0.08x_E + 0.04x_O \leq 600 \\ (1.2x_E + 0.6x_O) + (1.92x_E + 1.68x_O) + (1.10x_E + 0.88x_O) \leq 110000 \end{cases}$$

Il primo addendo dell'ultimo vincolo é il costo della manodopera.

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

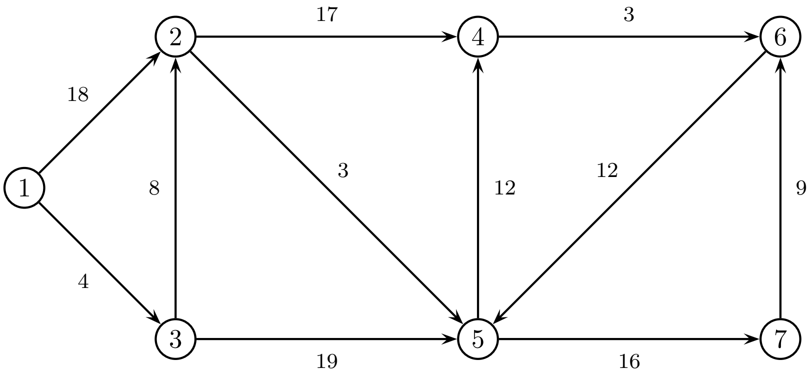


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (3,6) (4,6) (5,6)	(3,5)	$x = (-3,\ 6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7,\ 6,\ -3,\ 5)$	NO	SI
(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)	(3,4)	$\pi = (0,\ 0,\ 10,\ 7,\ 15,\ 10)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

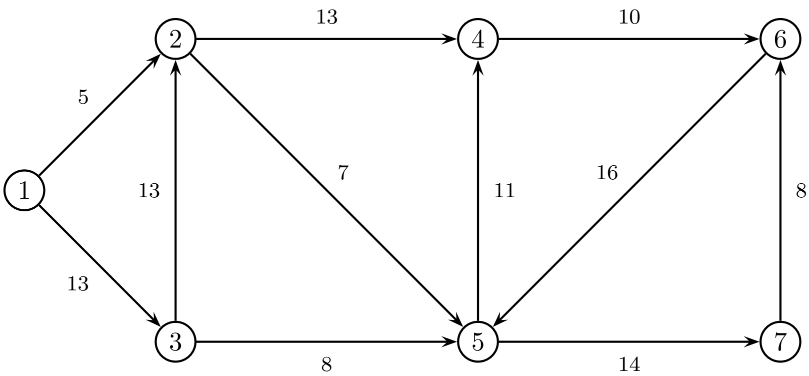
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5)	(1,3) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5)
Archi di U	(5,6)	(5,6)
x	$(3,\ 0,\ 3,\ 0,\ 3,\ 3,\ 7,\ 0,\ 0,\ 5)$	$(0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 3,\ 3,\ 7,\ 0,\ 0,\ 5)$
π	$(0,\ 7,\ 17,\ 20,\ 22,\ 14)$	$(0,\ 0,\ 10,\ 13,\ 15,\ 7)$
Arco entrante	(1,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	7 , 3	6 , 0
Arco uscente	(1,2)	(2,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		6		7	
nodo 2	18	1	12	3	12	3	12	3	12	3	12	3	12	3
nodo 3	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	29	2	27	5	27	5	27	5	27	5
nodo 5	$+\infty$	-1	23	3	15	2	15	2	15	2	15	2	15	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	4	30	4	30	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	5	31	5	31	5	31	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 3 - 5 - 7	8	(5, 8, 0, 5, 0, 8, 0, 0, 13, 0, 0)	13
1 - 3 - 2 - 5 - 7	1	(5, 9, 0, 6, 1, 8, 0, 0, 14, 0, 0)	14

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\, x_1 + 8\, x_2 \\ 19\, x_1 + 14\, x_2 \leq 69 \\ 12\, x_1 + 18\, x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\dfrac{69}{19}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 43$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $\qquad v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1 \qquad x_1 \leq 3$

$r = 4 \qquad 7\, x_1 + 5\, x_2 \leq 25$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

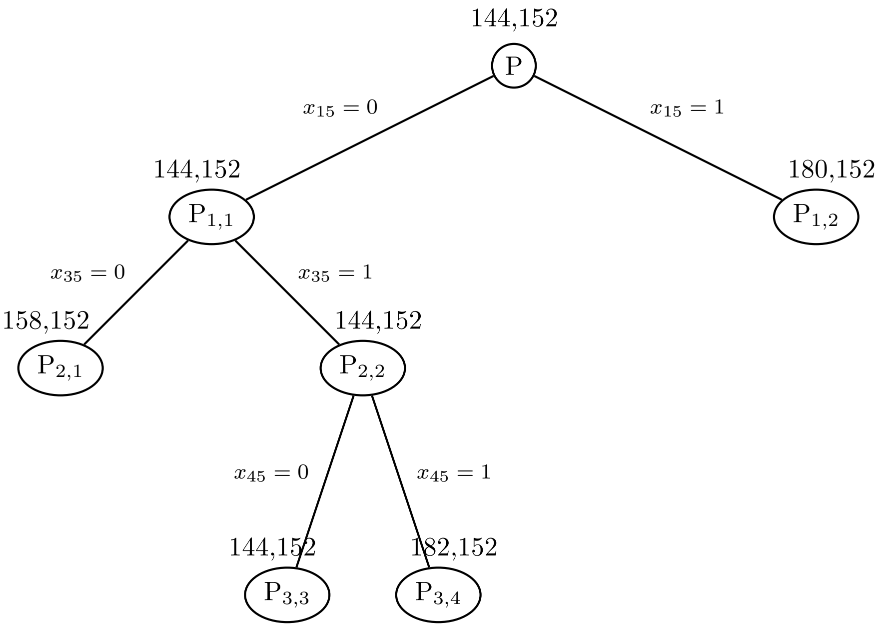
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (2 , 4) (2 , 5) (3 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 144$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 – 3 – 5 – 2 – 1 $\qquad v_S(P) = 152$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{15}, x_{35}, x_{45}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2^2 - 9 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(0, 1)	$(0, 2)$		NO	NO	SI	SI	NO
(-0.0526,8.99)	(-2.1052,0)		SI	SI	NO	NO	NO
(0, 3)	$\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
(0, −3)	$\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\, x_1^2 - 6\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 - 6\, x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1, 3)$, $(5, 3)$, $(2, -3)$ e $(-2, 1)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(\frac{11}{3}, 3)$	$(0, 1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{116}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{29}$	$(5, 3)$