Esame di Ricerca Operativa del 21/06/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Un'azienda vinicola produce tre qualitá di vino Q_1, Q_2, Q_3 che vende ad un prezzo di $40E$, $50E$, $60E$ ad ettolitro, rispettivamente (E=euro). Il processo di produzione e' basato sulle seguenti ipotesi:

- Per produrre un ettolitro di ciascuna qualitá Q_1, Q_2, Q_3 sono necessari $3, 4, 5$ ettolitri di mosto e $4, 5, 6$ ore di lavorazione, rispettivamente;
- E' necessario che la quantitá della qualitá Q_1 prodotta sia almeno il 30% della produzione complessiva.

Sapendo che l'azienda ha a disposizione 150 ettolitri di mosto e 200 ore di lavorazione per ogni mese e che il costo di un ettolitro di mosto é $5E$, si scriva un problema di programmazione lineare che formalizzi un piano di produzione mensile in modo da massimizzare il profitto complessivo.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

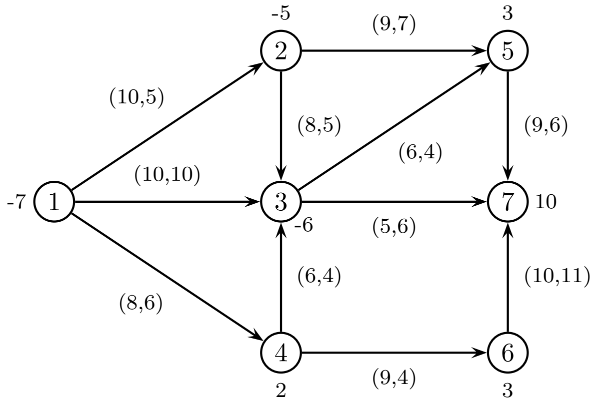
$$
\begin{cases}
\max\ 7\ x_1 + x_2 \\
x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\
-x_1 + x_2 \leq -7 \\
x_1 \leq 5 \\
x_1 - x_2 \leq 12 \\
-2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\
-x_1 - x_2 \leq 6 \\
-x_2 \leq 11
\end{cases}
$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{4, 6\}$	$y =$		

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,5}					
2° iterazione						

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

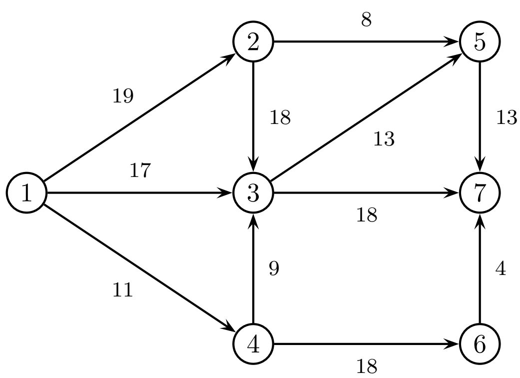


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

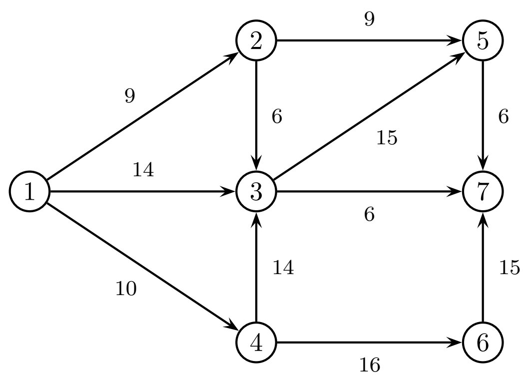
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \\ 19\ x_1 + 12\ x_2 \leq 60 \\ 8\ x_1 + 17\ x_2 \leq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	59	58
3			13	11
4				98

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{34}, x_{35}. Dire se l'algoritmo è terminato.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Variabili decisionali:

x_i = ettolitri di vino della qualitá Q_i da produrre mensilmente $i = 1, 2, 3$;

Il profitto complessivo é: $40x_1 + 50x_2 + 60x_3 - 5(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$

Modello:

$$\begin{cases} \max\ (25x_1 + 30x_2 + 35x_3) \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 150 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 200 \\ -0.7x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 \le 0 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

Esercizio 2. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

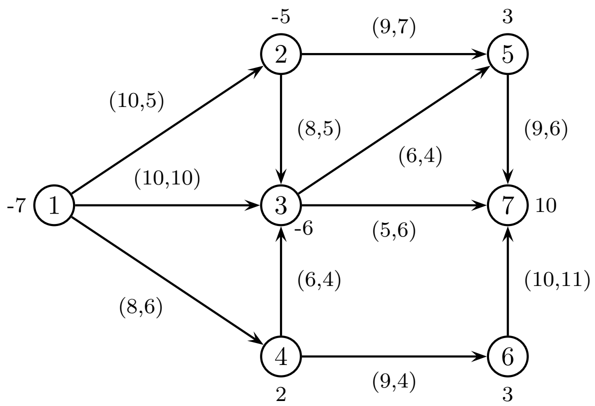
$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + x_2 \\ x_1 + 2\ x_2 \le -5 \\ -x_1 + x_2 \le -7 \\ x_1 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ -2\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_2 \le 11 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (3,\ -4)$	SI	NO
$\{4,\ 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ -4,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 2.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 5\}$	$(1,\ -6)$	$\left(0,\ -\frac{5}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{8}{3},\ 0,\ 0\right)$	2	$12,\ 5,\ 3,\ \frac{15}{2}$	6
2° iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(2,\ -8)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 5,\ 0)$	5	$3,\ 1,\ 3$	4

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

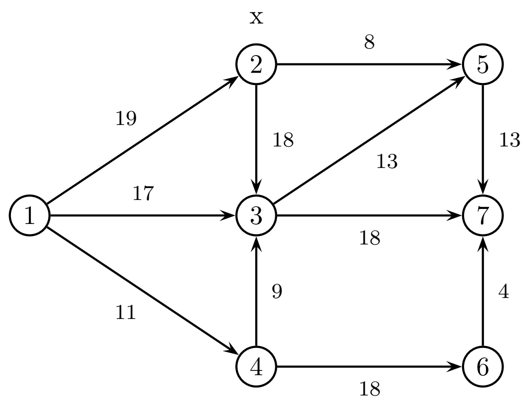


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

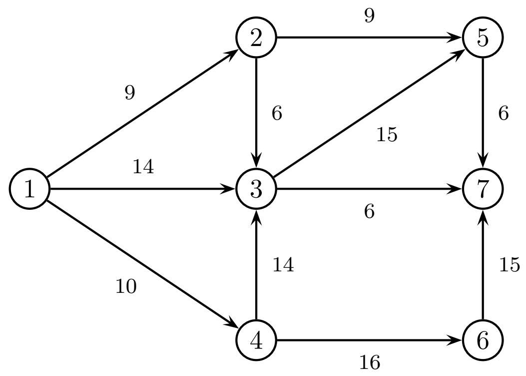
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(2, 0, 5, 0, 0,7, 2, 4, 0, 3, 6, 0)	(0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0)
π	(0, 10, 13, 8, 19, 17, 18)	(0, 7, 10, 8, 16, 17, 15)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	2 , 4
Arco uscente	(1,2)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		5		6		7	
nodo 2	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
nodo 3	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1	17	1
nodo 4	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	3	27	2	27	2	27	2	27	2
nodo 6	$+\infty$	-1	29	4	29	4	29	4	29	4	29	4	29	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	3	35	3	35	3	33	6	33	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0)	6
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 6, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 0, 6, 0)	12
1 - 4 - 6 - 7	10	(6, 6, 10, 0, 6, 0, 6, 0, 10, 6, 10)	22

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \\ 19\ x_1 + 12\ x_2 \leq 60 \\ 8\ x_1 + 17\ x_2 \leq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{60}{19}, 0\right)$ $v_S(P) = 34$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $v_I(P) = 33$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $x_1 \leq 3$
$r = 4$ $11\, x_1 + 6\, x_2 \leq 34$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	59	58
3			13	11
4				98

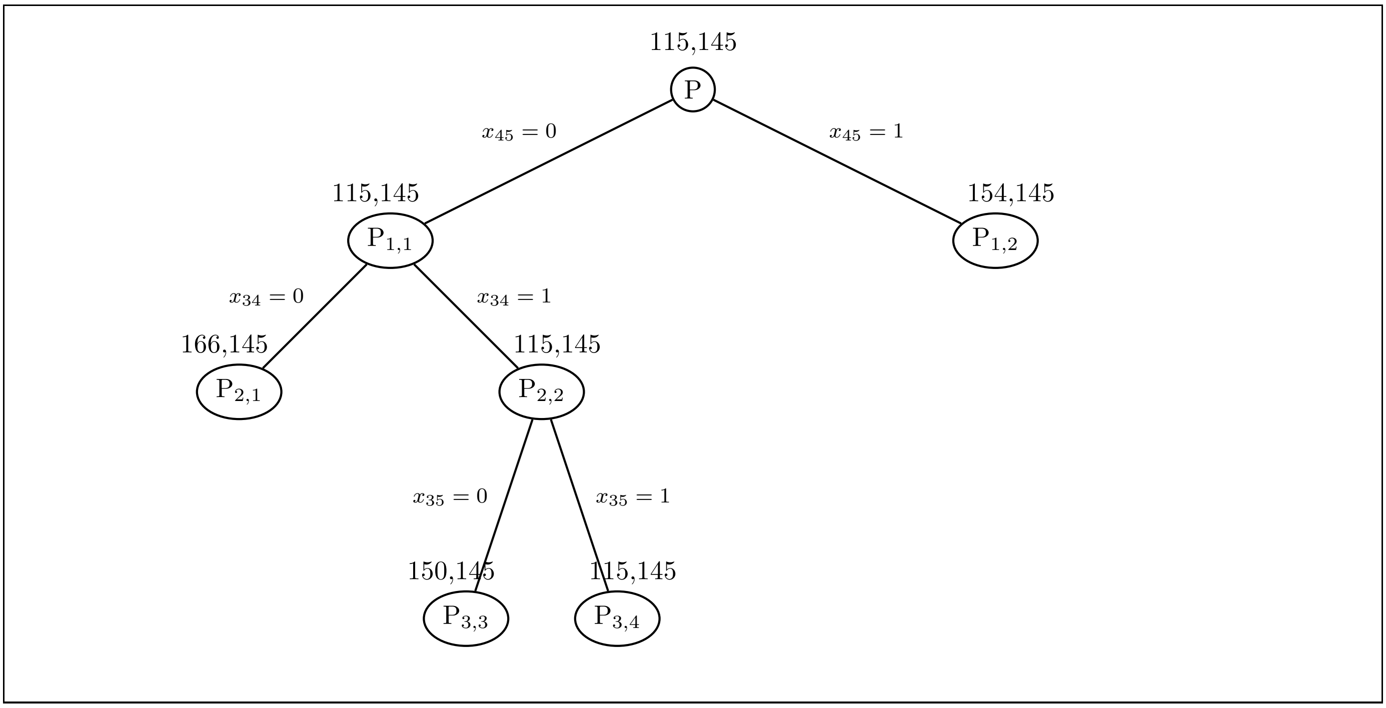
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (2 , 3) (2 , 4) (3 , 4) (3 , 5) $v_I(P) = 115$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 5 - 1 - 2 - 4$ $v_S(P) = 145$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{34}, x_{35}.



115,145
P
$x_{45} = 0$
$x_{45} = 1$
115,145
$P_{1,1}$
154,145
$P_{1,2}$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
166,145
$P_{2,1}$
115,145
$P_{2,2}$
$x_{35} = 0$
$x_{35} = 1$
150,145
$P_{3,3}$
115,145
$P_{3,4}$