Esame di Ricerca Operativa del 21/02/19

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale.

$$\begin{cases} \max\ 3\ x_1 + x_2 \\ -6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\ 4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\ -2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$$

	Base	x	Degenere?	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° passo	{3,4}						
2° passo							

Esercizio 2. Una raffineria di petrolio miscela 4 tipi di greggio per ottenere 3 tipi di carburante: senza piombo, diesel e blu diesel. La tabella seguente mostra la quantità disponibile ed il costo di ogni tipo di greggio:

Tipo di greggio	Barili disponibili	Costo (euro/barile)
1	5000	45
2	2400	35
3	4000	60
4	1500	30

Il prezzo di vendita ed i requisiti tecnici di ogni carburante, in termini di minima e massima percentuale di ogni tipo di greggio, sono i seguenti:

Tipo di carburante	Greggio richiesto	Prezzo (euro/barile)
senza piombo	almeno 20% di tipo 2 al più 30% di tipo 4	75
diesel	almeno 40% di tipo 3	68
blu diesel	al più 50% di tipo 1	72

La raffineria vuole trovare la composizione dei carburanti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

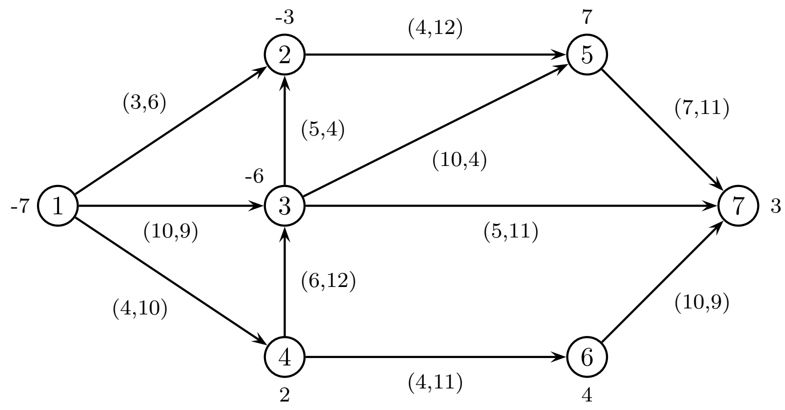
```
c=                                      intcon=

A=                                      b=

Aeq=                                    beq=

lb=                                     ub=
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 9\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 64 \\ 9\ x_1 + 15\ x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

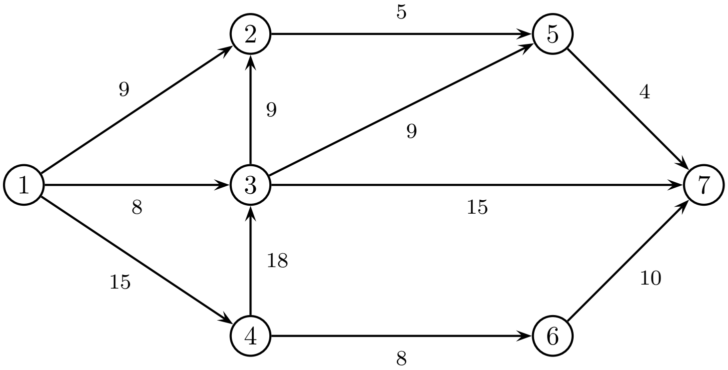
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

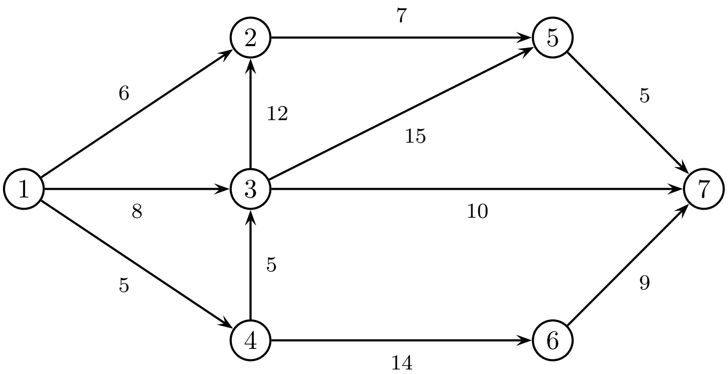
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 555 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	11	12	16	17	21	22	6
Volumi	12	55	417	69	426	48	349

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1\, x_2 \le 0, \quad x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 + x_2^2 - 1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(-1,0)							
(0,1)							
(0,-1)							
(1,0)							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\, x_1^2 + 2\, x_1\, x_2 + 4\, x_1 + 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(5,-1)$, $(-3,-1)$, $(-1,-4)$ e $(1,5)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(1,-3)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$\left(\frac{5}{2},\ -2\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{5}{11},\ -\frac{13}{22},\ 0,\ 0\right)$	4	$52,\ 11,\ 132$	2
2° iterazione	$\{2,\ 3\}$	$(4,\ 0)$	$\left(0,\ \frac{13}{29},\ -\frac{1}{29},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	3	$\frac{29}{2},\ \frac{319}{18}$	1

Esercizio 2. Variabili decisionali: x_{ij} = barili di greggio di tipo i usati per produrre il carburante j
Modello:

$$\begin{cases} \max\ 75\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+68\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+72\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}) \\ \qquad -45\,(x_{11}+x_{12}+x_{13})-35\,(x_{21}+x_{22}+x_{23})-60\,(x_{31}+x_{32}+x_{33})-30\,(x_{41}+x_{42}+x_{43}) \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 5000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 2400 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 4000 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}\le 1500 \\ x_{21}\ge 0.2\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) \\ x_{41}\le 0.3\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) \\ x_{32}\ge 0.4\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}) \\ x_{13}\le 0.5\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}) \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1)	(0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0)
π	(0, 3, 13, 4, 7, 8, 18)	(0, 3, 10, 4, 7, 8, 15)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 1	6 , 1
Arco uscente	(6,7)	(1,3)

Esercizio 4.

sol. ottima del rilassamento $=\left(0,\frac{59}{15}\right)$ $\qquad v_S(P)=35$

sol. ammissibile $=(0,3)$ $\qquad v_I(P)=27$

$r=2$ $\qquad x_2\le 3$
$r=3$ $\qquad 5\,x_1+9\,x_2\le 35$

Esercizio 5.

	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		7		6	
nodo 2	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 3	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 4	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 5	$+\infty$	-1	17	3	14	2	14	2	14	2	14	2	14	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	4	23	4	23	4
nodo 7	$+\infty$	-1	23	3	23	3	18	5	18	5	18	5	18	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		4, 5, 7		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	8	(0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)	8
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 8, 0, 5, 0, 0, 8, 0, 0, 5, 0)	13
1 - 4 - 3 - 7	2	(5, 8, 2, 5, 0, 0, 10, 2, 0, 5, 0)	15
1 - 4 - 6 - 7	3	(5, 8, 5, 5, 0, 0, 10, 2, 3, 5, 3)	18

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

Esercizio 6.

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	11	12	16	17	21	22	6
Volumi	12	55	417	69	426	48	349

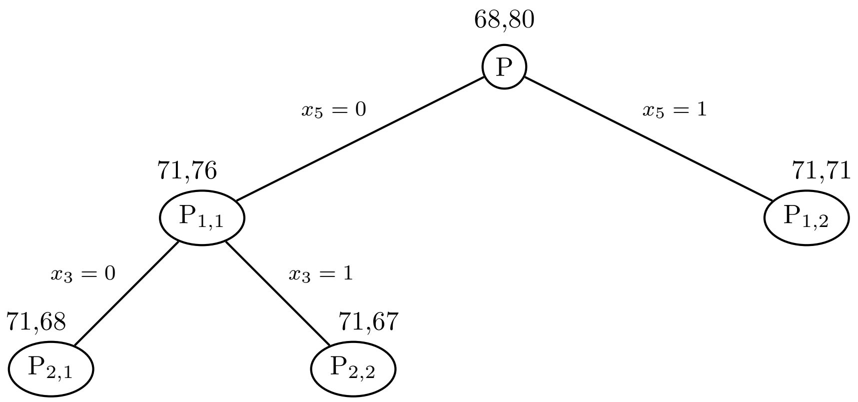
a)

sol. ammissibile $= (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 68$

b)

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, 0, 1, \frac{371}{426}, 1, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 80$

c)



soluzione ottima $= (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ $\qquad$ valore ottimo $= 71$

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 * x_2 \leq 0, \quad x_1^2 - 2 * x_1 * x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ 0)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ 1)$	$(-1, 0)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0,\ -1)$	$(1, 0)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(1,\ 0)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 8.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
(1,-3)	$-6x_1 + 12x_2$	(-1,-4)	(-2,1)	1	(-1,-4)