

(Cognome)

(Nome)

(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min 17 y_1 + 3 y_2 + 28 y_3 + 16 y_4 + 3 y_5 + 5 y_6 \\ -6 y_1 - 2 y_2 + 7 y_3 + 4 y_4 - 2 y_5 - 2 y_6 = 2 \\ 10 y_1 + 2 y_2 + 2 y_3 - 3 y_4 - 4 y_5 + 3 y_6 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	degenere	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
passo 1	{2,6}						
passo 2							

Esercizio 2. Un'azienda produce tre tipi di prodotti, A, B e C, utilizzando tra le diverse materie prime anche l'alluminio. Di quest'ultima materia prima, per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 400 kg. Un chilogrammo di alluminio costa all'azienda 7 euro. La seguente tabella mostra i kg di alluminio richiesti per produrre un kg di A, B e C, i costi di produzione (in euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i ricavi (in euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C:

prodotti	alluminio (kg)	costo (euro/kg)	ricavo (euro/kg)
A	0.3	12	26
B	0.6	6	31
C	0.9	7	39

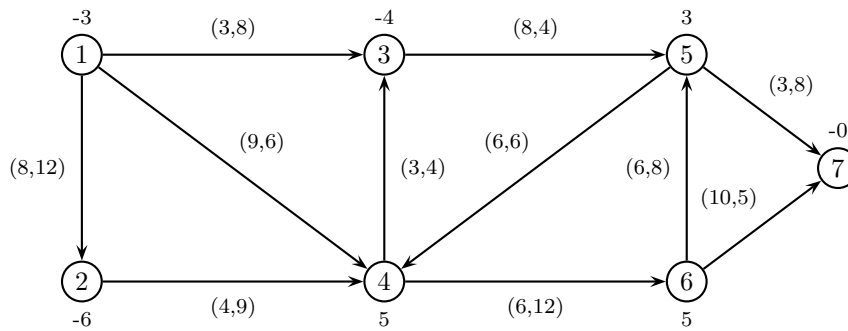
Determinare la produzione mensile che massimizza i profitti sapendo che per produrre A non si deve utilizzare più di 1/3 dell'alluminio utilizzato in totale.

variabili decisionali:
 modello:

COMANDI DI MATLAB

c=	intcon=
A=	b=
Aeq=	beq=
lb=	ub=

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell' algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(3,5)	
x		
degenere		
π		
degenere		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max 14 x_1 + 5 x_2 \\ 17 x_1 + 12 x_2 \leq 66 \\ 7 x_1 + 19 x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

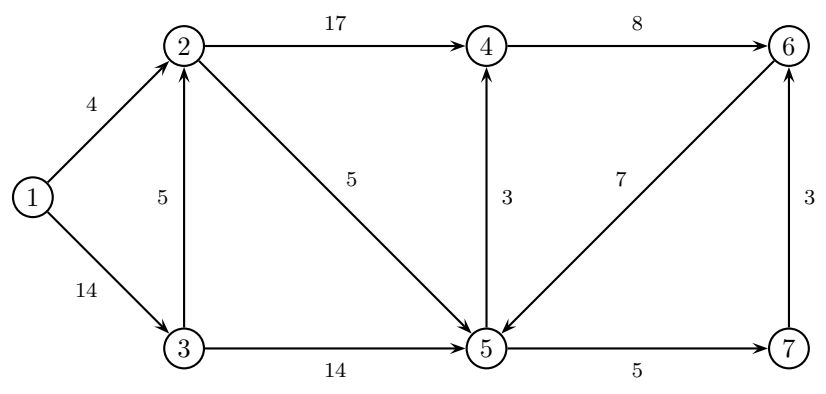
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

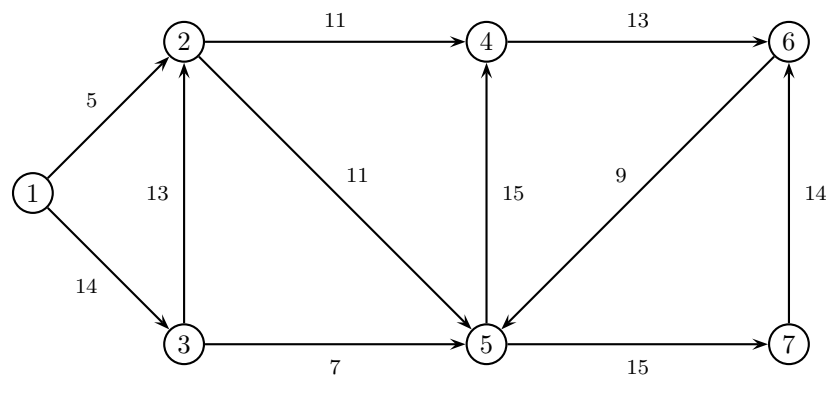
$r =$ taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	30	25	29	47
2		18	94	61
3			54	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2-albero di costo minimo.

2-albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23} , x_{14} , x_{34} dicendo se l'algoritmo si é concluso o dovrebbe continuare.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : 9 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$							
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$							
$\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min -2x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_2^2 + 5x_1 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-3, -1)$, $(-4, 2)$, $(1, -2)$ e $(5, 2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2, 4}	$\left(\frac{41}{2}, 22\right)$	(0, 1, 0, 1, 0, 0)	1	$\frac{1}{11}, \frac{1}{4}$	2
2° iterazione	{1, 4}	$\left(\frac{211}{22}, \frac{82}{11}\right)$	$\left(\frac{1}{11}, 0, 0, \frac{7}{11}, 0, 0\right)$	3	$\frac{2}{29}, \frac{7}{41}$	1

variabili decisionali: $x_A = \text{kg prodotti di A}$, $x_B = \text{kg prodotti di B}$, $x_C = \text{kg prodotti di C}$

Esercizio 2.

$$\text{modello: } \begin{cases} \max (26 - 12 - 2.1) x_A + (31 - 6 - 4.2) x_B + (39 - 7 - 6.3) x_C \\ 0.3 x_A + 0.6 x_B + 0.9 x_C \leq 400 \\ 0.3 x_A \leq (0.3 x_A + 0.6 x_B + 0.9 x_C)/3 \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \\ x_C \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

c = [-11.9; -20.8; -25.7]	
A = [0.3 0.6 0.9; 0.2 -0.2 -0.3]	b=[400; 0]
Aeq=[]	beq=[]
lb=[0;0;0]	ub=[]

Esercizio 3.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5)
Archi di U	(5,4)	(3,5) (5,4)
x	(3, 0, 0, 9, 4, 0, 10, 6, 0, 5, 0)	(3, 0, 0, 9, 4, 0, 10, 6, 0, 5, 0)
π	(0, 8, 16, 12, 24, 18, 27)	(0, 8, 3, 12, 24, 18, 27)
Arco entrante	(1,3)	(1,4)
ϑ^+, ϑ^-	0, 3	6, 3
Arco uscente	(3,5)	(1,2)

Esercizio 4.

$$\begin{cases} \max 14 x_1 + 5 x_2 \\ 17 x_1 + 12 x_2 \leq 66 \\ 7 x_1 + 19 x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{66}{17}, 0\right)$	$v_S(P) = 54$
--	---------------

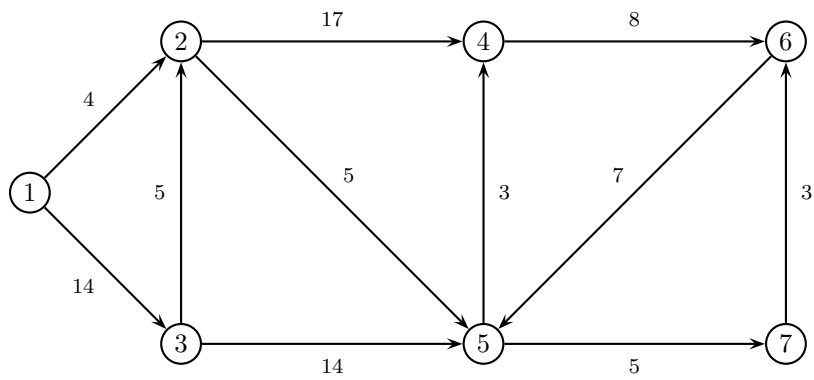
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = (3, 0)	$v_I(P) = 42$
---------------------------	---------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

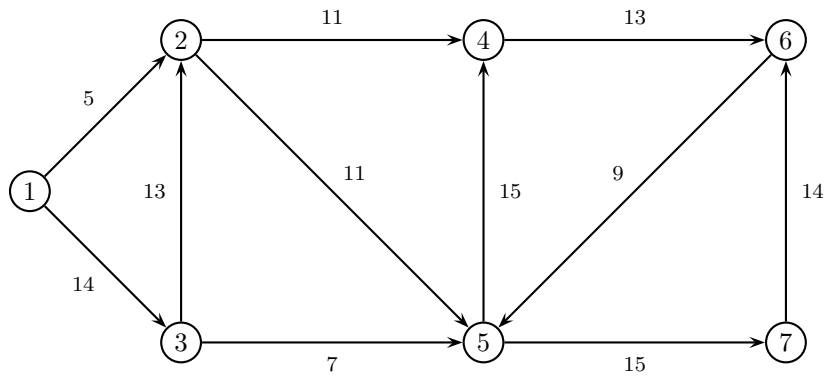
$r = 1$	$x_1 \leq 3$	
$r = 4$	$10 x_1 + 7 x_2 \leq 38$	

Esercizio 5.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		5		4		3		7		6	
nodo 2	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 3	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 4	$+\infty$	-1	21	2	12	5	12	5	12	5	12	5	12	5
nodo 5	$+\infty$	-1	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	20	4	20	4	17	7	17	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	14	5	14	5	14	5	14	5	14	5
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		3, 4, 7		3, 6, 7		6, 7		6		\emptyset	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	5	(5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 3 - 5 - 7	7	(5, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 0, 12, 0, 0)	12
1 - 3 - 2 - 5 - 7	3	(5, 10, 0, 8, 3, 7, 0, 0, 15, 0, 0)	15

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

Esercizio 6.

città	2	3	4	5
1	30	25	29	47
2		18	94	61
3			54	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2-albero di costo minimo.

2-albero: $(1, 2) (1, 3) (2, 3) (3, 5) (4, 5)$

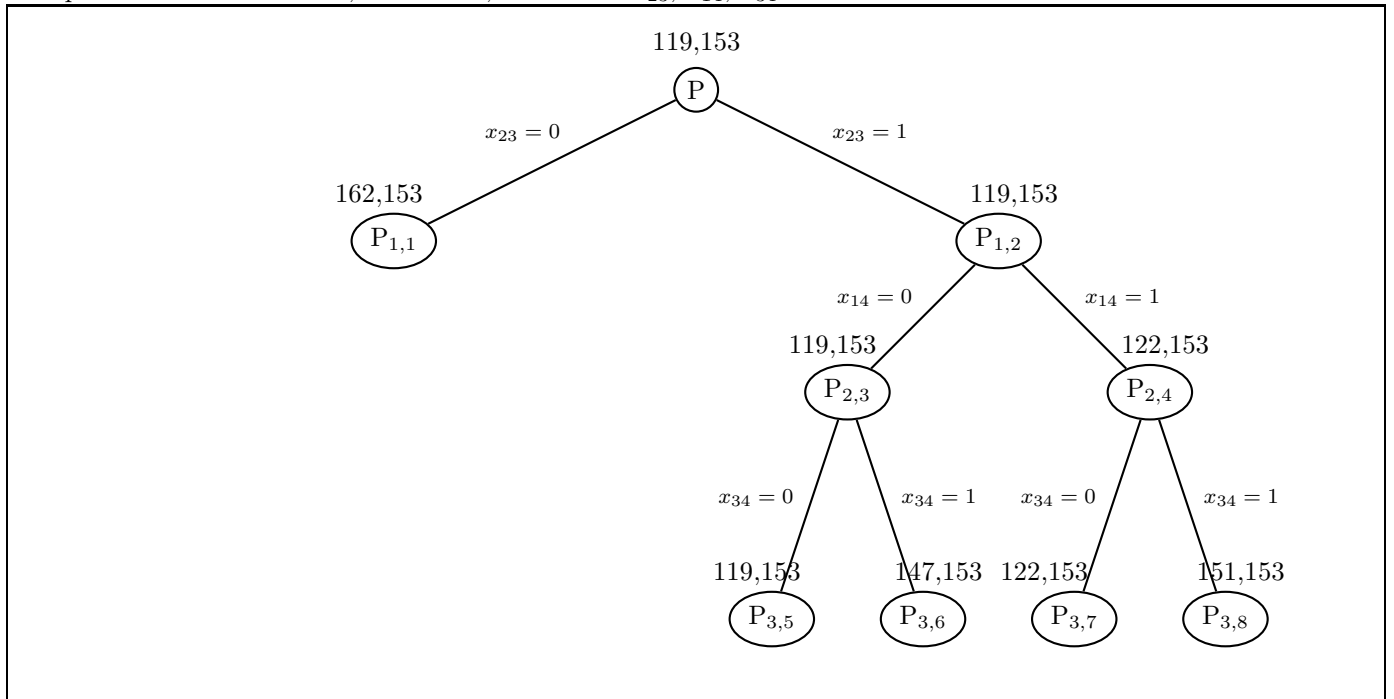
$$v_I(P) = 119$$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 3 - 2 - 5 - 4$

$$v_S(P) = 153$$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2-albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{23}, x_{14}, x_{34} .



Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : 9 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{5\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	SI	NO
$\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{13}}{6}, 0\right)$		NO	NO	NO	SI	NO

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min -2x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_2^2 + 5x_1 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-3, -1)$, $(-4, 2)$, $(1, -2)$ e $(5, 2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$	$(-3, -1)$	$\begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ -3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{61}{6}, -\frac{61}{2}\right)$	$\frac{2}{61}$	$\frac{2}{61}$	$(-3, -1)$