Esame di Ricerca Operativa del 18/06/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 6 \\ -3\ x_1 + 4\ x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{2, 3\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1 iterazione	{5,6}					
2 iterazione						

Esercizio 3. In un indagine a carattere mensile dell'ufficio emigrazione, viene rilevato un flusso migratorio di 500 persone dalla Libia verso l'Italia e la Spagna. Viene stimato che 100 migranti si stabiliscono in Italia e 50 migranti si stabiliscono in Spagna, mentre i rimanenti si spostano in Francia o in Germania. I costi di trasferimento (in euro per persona) tra i vari stati sono indicati nella seguente tabella.

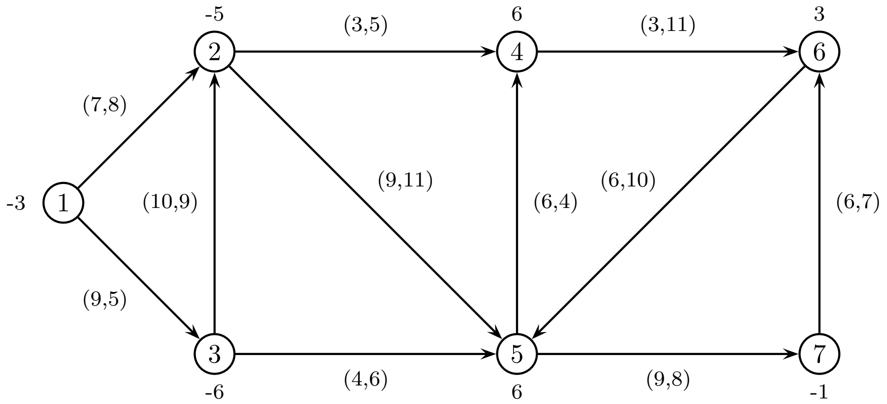
	Italia	Spagna	Francia	Germania
Libia	500	400		
Italia			300	400
Spagna			200	400

Si formuli un problema di programmazione lineare che determini i flussi mensili di migranti tra i vari stati ed il numero di persone che si stabiliscono in Francia ed in Germania, in modo che risulti minimo il costo complessivo di trasferimento dei migranti tra i vari stati.

variabili decisionali:

modello:

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo Ã¨ indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitÃ).

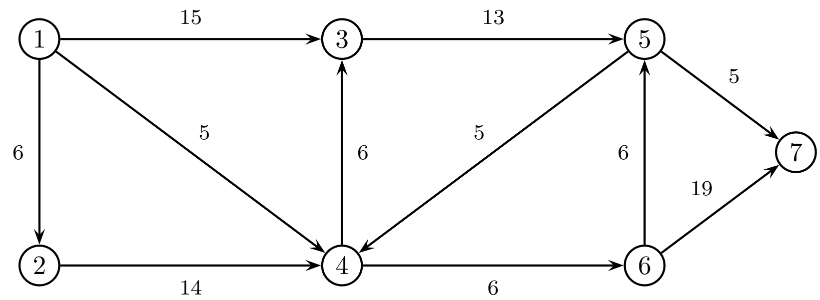


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(1,3)	$x =$		
(1,2) (3,2) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	(2,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

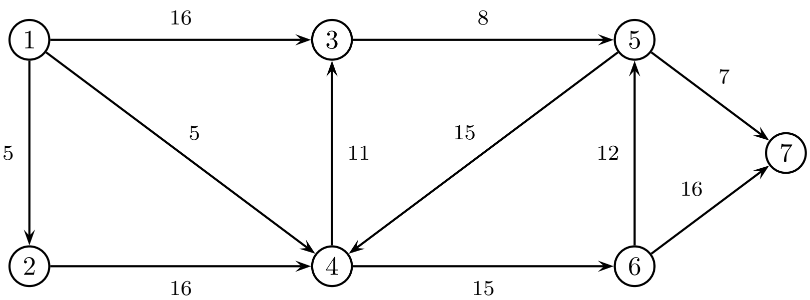
	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (5,4) (7,6)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$	$N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 5\ x_2 \\ 14\ x_1 + 13\ x_2 \geq 43 \\ 5\ x_1 + 15\ x_2 \geq 46 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 citt? , le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi? vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{14}, x_{45}.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ 3\ x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -2\ x_1 + x_2 \le 2 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \le 2 \\ -x_1 + 3\ x_2 \le 6 \\ -3\ x_1 + 4\ x_2 \le 8 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (4,\ 0)$	SI	NO
$\{2,\ 3\}$	$y = (0,\ 18,\ 11,\ 0,\ 0,\ 0)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1 iterazione	$\{5,\ 6\}$	$(0,\ 2)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{37}{5},\ \frac{19}{5}\right)$	5	$0,\ \frac{40}{17}$	3
2 iterazione	$\{3,\ 6\}$	$(0,\ 2)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{37}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{18}{5}\right)$	6	$30,\ 5$	4

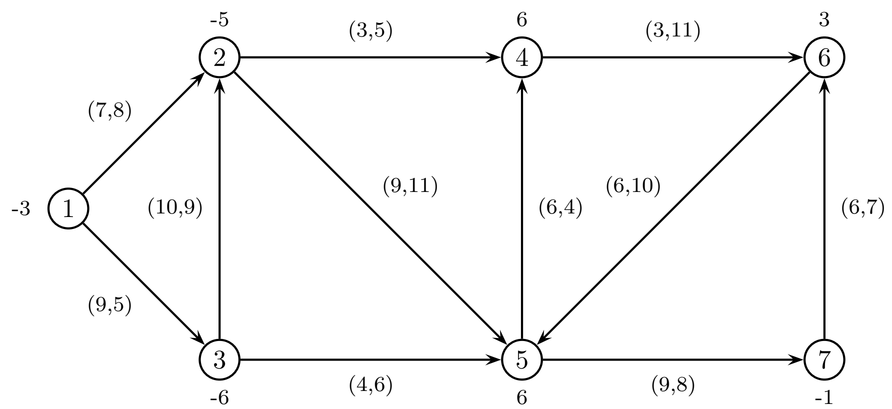
Esercizio 3. Si puo' formulare il problema come flusso di costo minimo su un grafo ove i nodi rappresentano gli stati e gli archi i possibili collegamenti tra di essi.

Variabili decisionali: si indichino con $i = 1, 2, .., 5$, la Libia,l'Italia, la Spagna, la Francia e la Germania, rispettivamente e siano $x_{ij} : (i, j) \in A := \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$, i flussi mensili tra i vari stati. Si ponga $b := (-500, 100, 50, b_4, b_5)$ il vettore dei bilanci ai nodi ove b_4 e b_5 sono quantitá non negative da determinare.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 500x_{12} + 400x_{13} + 300x_{24} + 400x_{25} + 200x_{34} + 400x_{35} \\ x_{12} + x_{13} = 500 \\ x_{12} - x_{24} - x_{25} = 100 \\ x_{13} - x_{34} - x_{35} = 50 \\ x_{24} + x_{34} = b_4 \\ x_{25} + x_{35} = b_5 \\ b_4 + b_5 = 350 \\ x_{ij} \ge 0,\ (i, j) \in A \\ b_4, b_5 \ge 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo ? indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacit?).

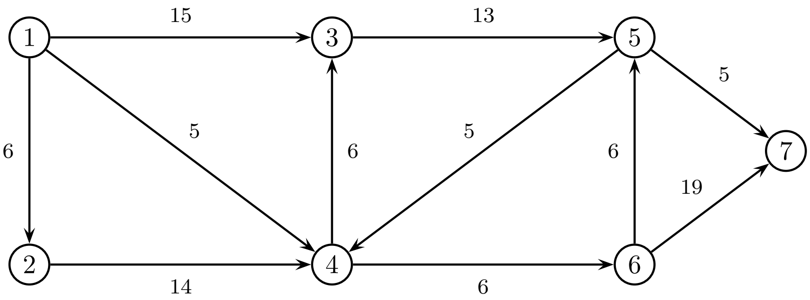


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(1,3)	$x = (-2,\ 5,\ 0,\ 0,\ -3,\ 14,\ -6,\ 0,\ -1,\ -9,\ 0)$	NO	NO
(1,2) (3,2) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5)	(2,5)	$\pi = (0,\ 7,\ -3,\ 7,\ 1,\ -5,\ 10)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

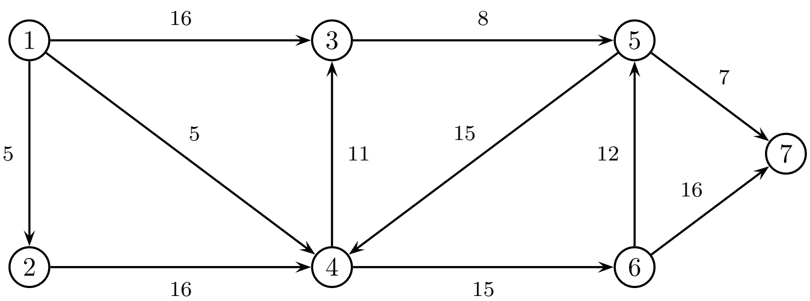
	1 iterazione	2 iterazione
Archi di T	(1,3) (2,5) (3,2) (4,6) (5,4) (7,6)	(1,2) (2,5) (3,2) (4,6) (5,4) (7,6)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	(0, 3, 5, 9, 9, 0, 2, 3, 0, 0, 1)	(3, 0, 5, 9, 6, 0, 2, 3, 0, 0, 1)
π	(0, 19, 9, 34, 28, 37, 31)	(0, 7, −3, 22, 16, 25, 19)
Arco entrante	(1,2)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 3	6 , 6
Arco uscente	(1,3)	(3,2)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		6		5		7	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	15	1	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4
nodo 4	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	24	3	17	6	17	6	17	6
nodo 6	$+\infty$	-1	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4	11	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	6	22	5	22	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	7	(0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 4 - 6 - 7	5	(0, 7, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 5)	12
1 - 2 - 4 - 6 - 7	5	(5, 7, 5, 5, 7, 0, 10, 0, 7, 0, 10)	17
1 - 3 - 5 - 4 - 6 - 7	1	(5, 8, 5, 5, 8, 0, 11, 1, 7, 0, 11)	18

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1,3\}$ $\quad N_t = \{2,4,5,6,7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 5\ x_2 \\ 14\ x_1 + 13\ x_2 \geq 43 \\ 5\ x_1 + 15\ x_2 \geq 46 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{43}{13}\right)$ $\qquad v_I(P) = 17$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 4)$ $\qquad v_S(P) = 20$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 13\,x_1 + 12\,x_2 \geq 40$

$r = 4$ $\qquad 12\,x_1 + 11\,x_2 \geq 37$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 4) (2 , 3) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 119$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo pi? vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: 3 − 2 − 1 − 4 − 5 $\qquad v_S(P) = 121$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{14}, x_{45}.