Esame di Ricerca Operativa del 17/07/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_2 \leq -4 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{4, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 m^3. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

Barattolo	Prezzo (Euro)	Volume occupato (m^3)
2 kg	24	0.004
1.5 kg	16	0.003
1 kg	12	0.002

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 m^3. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato.

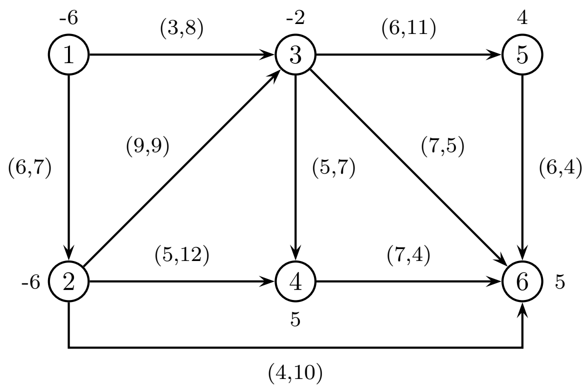
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

`c=`	`int=`
`A=`	`b=`
`Aeq=`	`beq=`
`lb=`	`ub=`

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

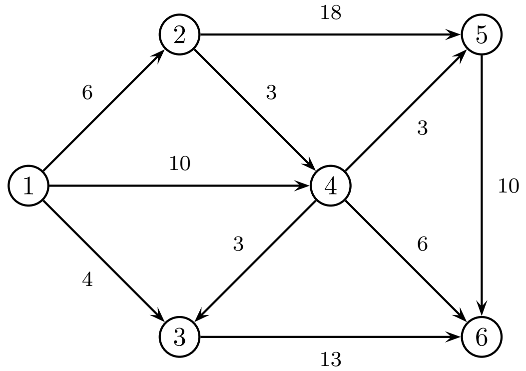


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,6) (3,4) (3,5) (3,6)	(1,2)	$x =$		
(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (3,6)	(1,2)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

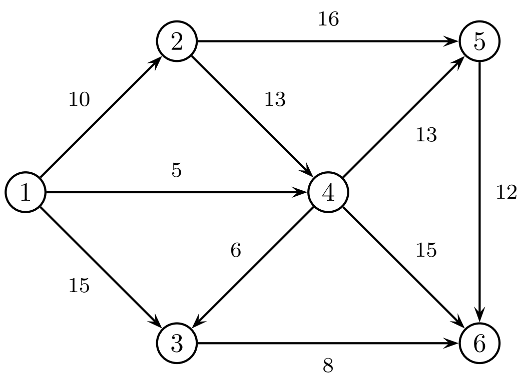
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	
Archi di U	(2,3)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato												
nodo 2												
nodo 3												
nodo 4												
nodo 5												
nodo 6												
insieme Q												

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 9\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 12\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	9	58
3			98	11
4				97

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{45}, x_{34}. Dire se l'algoritmo é terminato.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + 1 \le 0, \quad -x_1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$							
$(0,\ 0)$							
$(0,\ 2)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1^2 + 4\ x_1\, x_2 - 2\ x_2^2 + 3\ x_1 + 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1, -2)$, $(3, 1)$, $(-2, 3)$ e $(-3, -2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_2 \leq -4 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x = (5,\ -7)$	SI	NO
$\{4, 6\}$	$y = (0,\ 0,\ 0,\ -4,\ 0,\ -3,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4, 5\}$	$(2,\ -8)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 5,\ -6,\ 0,\ 0)$	5	$3,\ 1$	2
2° iterazione	$\{2, 4\}$	$(3,\ -9)$	$(0,\ 3,\ 0,\ -4,\ 0,\ 0,\ 0)$	4	$4,\ \frac{20}{3},\ 10$	1

Esercizio 3. Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 m^3. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

Barattolo	Prezzo (Euro)	Volume occupato (m^3)
2 kg	24	0.004
1.5 kg	16	0.003
1 kg	12	0.002

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 m^3. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato (ignorare il vincolo di interezza).

variabili decisionali: x_1 = numero di cartocci di latte prodotti
x_2 = numero di barattoli di latte da 2 kg
x_3 = numero di barattoli di latte da 1.5 kg
x_4 = numero di barattoli di latte da 1 kg

modello:
$$\begin{cases} \max\ 1.2\ x_1 + 24\ x_2 + 16\ x_3 + 12\ x_4 - 5\ (2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4) \\ x_1 \geq 600 \\ 2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4 \geq 200 \\ 0.002\ x_1 + 0.004\ x_2 + 0.003\ x_3 + 0.002\ x_4 \leq 28.3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

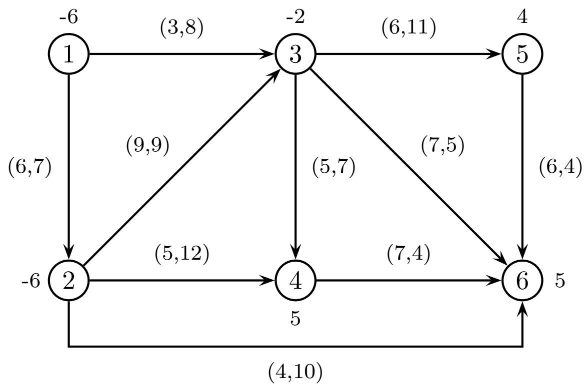
```
c=[-1.2; -14; -8.5; -7]

A=[0 -2 -1.5 -1; 0.002 0.004 0.003 0.002]          b=[-200; 28.3]

Aeq=[]                                              beq=[]

lb=[600; 0; 0; 0]                                   ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

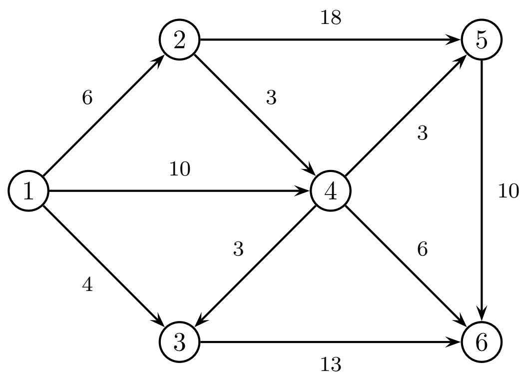


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,6) (3,4) (3,5) (3,6)	(1,2)	$x = (7,\ -1,\ 0,\ 0,\ 13,\ 5,\ 4,\ -8,\ 0,\ 0)$	NO	NO
(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (3,6)	(1,2)	$\pi = (0,\ -6,\ 3,\ -1,\ 9,\ 10)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

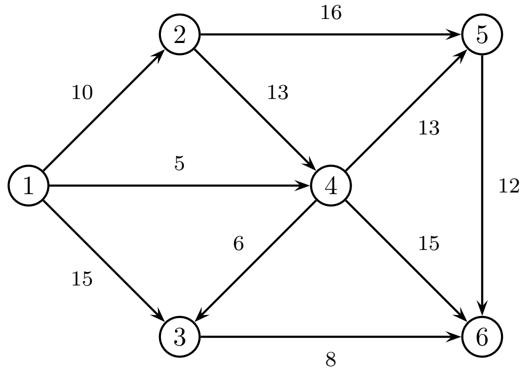
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6)	(1,3) (2,3) (3,4) (3,5) (3,6)
Archi di U	(2,3)	
x	$(3,\ 3,\ 9,\ 0,\ 0,\ 5,\ 4,\ 5,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 6,\ 6,\ 0,\ 0,\ 5,\ 4,\ 5,\ 0,\ 0)$
π	$(0,\ 6,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10)$	$(0,\ -6,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10)$
Arco entrante	(2,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	5 , 3	12 , 5
Arco uscente	(1,2)	(3,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		4		5		6	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 4	10	1	10	1	9	2	9	2	9	2	9	2
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	24	2	12	4	12	4	12	4
nodo 6	$+\infty$	-1	17	3	17	3	15	4	15	4	15	4
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 6		4, 5, 6		5, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 6	8	(0, 8, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)	8
1 - 4 - 6	5	(0, 8, 5, 0, 0, 8, 0, 0, 5, 0)	13
1 - 2 - 4 - 6	10	(10, 8, 5, 10, 0, 8, 0, 0, 15, 0)	23

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $\quad N_t = \{2, 4, 5, 6\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 9\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 12\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{16}{3}\right)$ $\qquad v_S(P) = 74$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 5)$ $\qquad v_I(P) = 70$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \leq 5$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	9	58
3			98	11
4				97

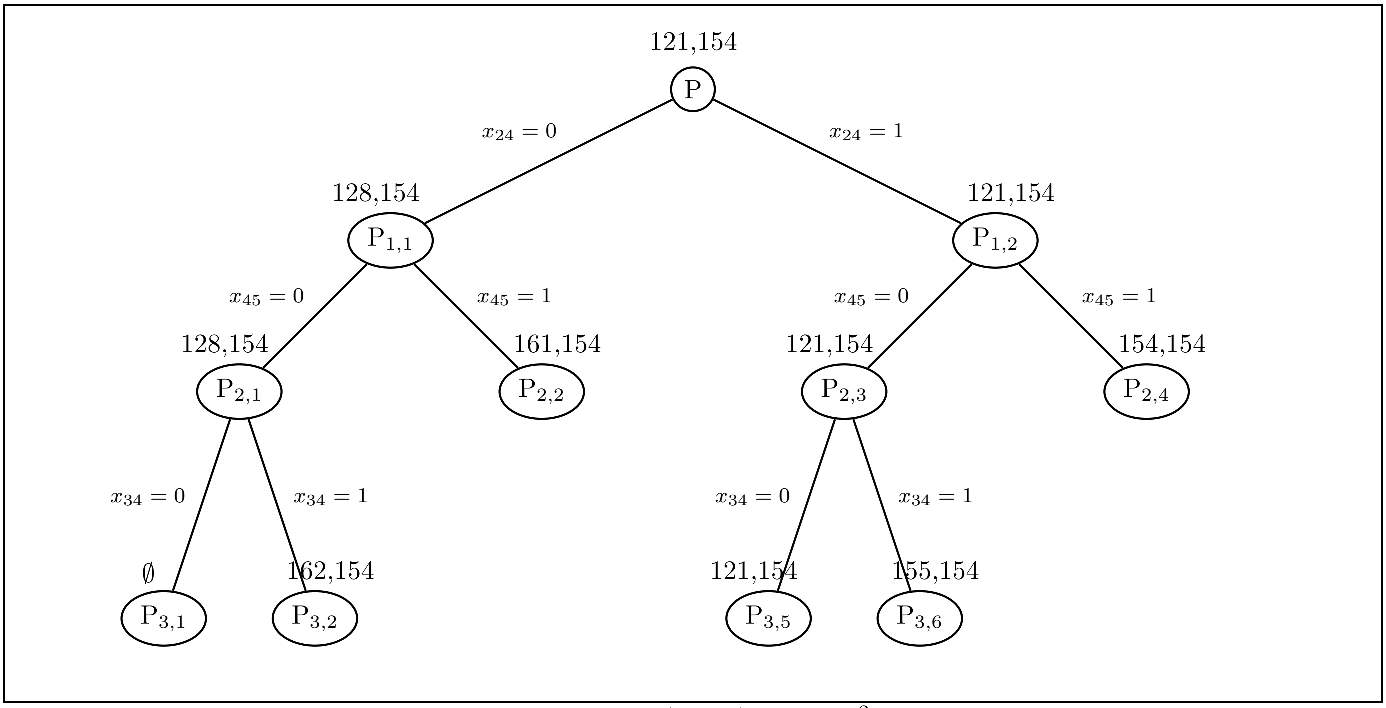
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 4) (2 , 4) (3 , 5) $\qquad v_I(P) = 121$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: 1 − 2 − 4 − 5 − 3 $\qquad v_S(P) = 154$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{45}, x_{34}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + 1 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$	$(-1, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0, \ 0)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0, \ 2)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4 \ x_1^2 + 4 \ x_1 \, x_2 - 2 \ x_2^2 + 3 \ x_1 + 8 \ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1, -2)$, $(3, 1)$, $(-2, 3)$ e $(-3, -2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$	$27\,x_1 - \frac{20}{3}\,x_2$	(-2 ,3)	$\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$	1	$(-2, 3)$