Esame di Ricerca Operativa del 17/01/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 6\ y_2 + 4\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 6\ y_6 + 10\ y_7 \\ -2\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -3 \\ y_1 + 2\ y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 = -4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\, 2\}$	$x =$		
$\{2,\, 3\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{1,7}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta deve spedire d_j automobili in 3 città diverse (dette 1-2-3) attingendo a tre depositi dislocati nel territorio nazionale (detti A-B-C) che hanno s_i automobili ciascuno e minimizzando i suoi costi di trasporto. Non è possibile tecnicamente spedire frigoriferi dal deposito B alla località 3.

	1	2	3	s_i
A	20	21	31	90
B	23	19		55
C	34	27	24	50
d_j	80	55	75	

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

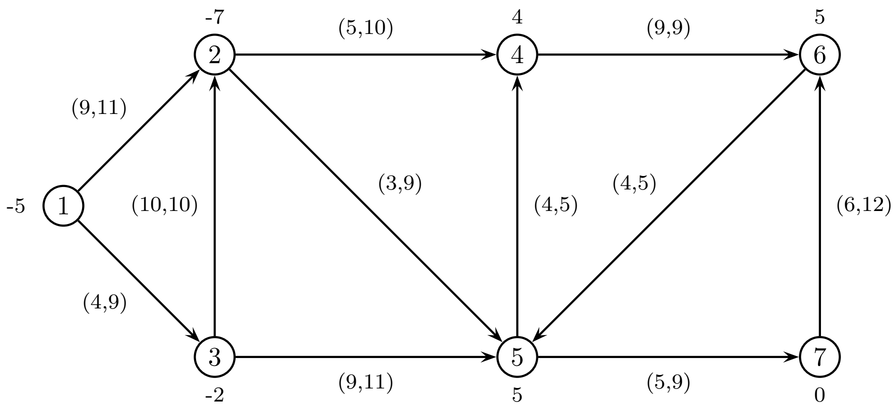
```
c=

A=                                      b=

Aeq=                                    beq=

lb=                                     ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

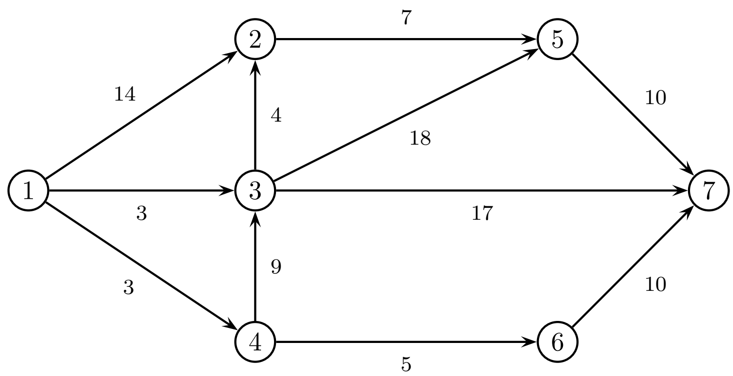


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6) (5,7)	(1,2)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,2) (5,4) (5,7) (7,6)	(6,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

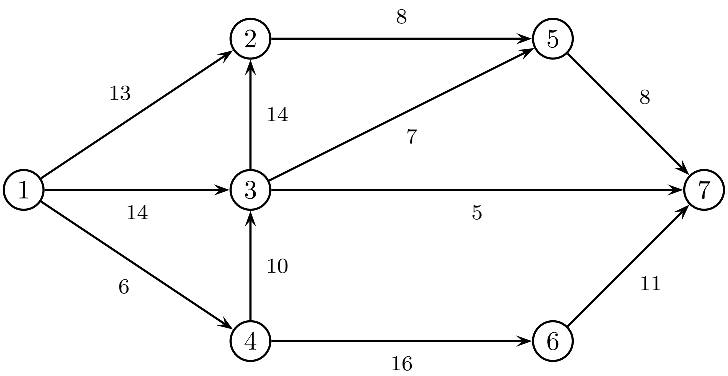
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6)	
Archi di U	(2,4)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 10\ x_2 \\ 16\ x_1 + 12\ x_2 \geq 57 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 551 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	5	7	16	8	18	10	13
Volumi	335	128	298	95	254	146	151

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1 + x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1 - 4 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(3,\ 0)$							
$(4,\ 0)$							
$\left(\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2}\right)$							
$\left(\frac{5}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2}\right)$							
$\left(4,\ \sqrt{3}\right)$							
$\left(4,\ -\sqrt{3}\right)$							
$(1,\ 0)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 9\,x_1 - 7\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-2,-4)$, $(-2,-1)$, $(5,0)$ e $(5,-2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(5, -\frac{2}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 6\ y_2 + 4\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 6\ y_6 + 10\ y_7 \\ -2\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -3 \\ y_1 + 2\ y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 = -4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -4)$	SI	NO
$\{2,\ 3\}$	$y = (0,\ -2,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{1,\ 7\}$	$(-1,\ -10)$	$\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{11}{2}\right)$	5	$\frac{3}{2},\ \frac{11}{4}$	1
2° iterazione	$\{5,\ 7\}$	$(3,\ -10)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ \frac{5}{2}\right)$	4	$\frac{5}{3}$	7

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

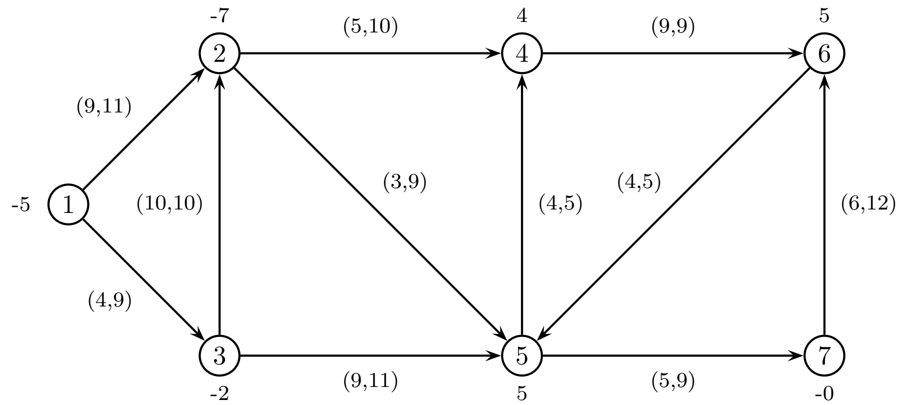
```
c=[20;21;31;23;19;1000;34;27;24]

A=[1 1 1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 ]          b=[ 90 ; 55 ; 50]

Aeq=[1 0 0 1 0 0 1 0 0;0 1 0 0 1 0 0 1 0; 0 0 1 0 0 1 0 0 1]          beq=[80; 55; 75]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0; 0 ; 0; 0; 0; 0]                                     ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

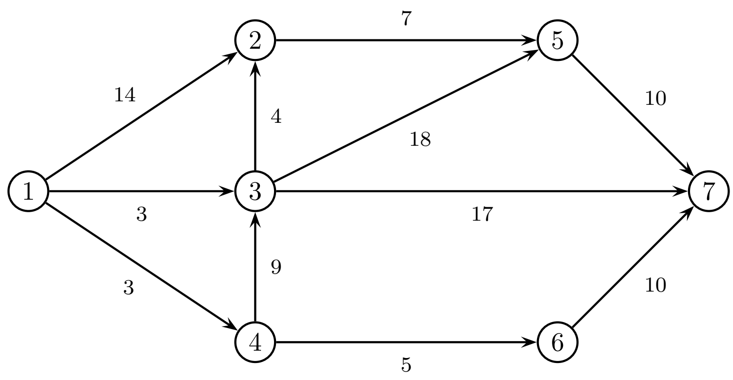


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6) (5,7)	(1,2)	$x = (11,\ -6,\ 9,\ 5,\ -4,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,2) (5,4) (5,7) (7,6)	(6,5)	$\pi = (0,\ 9,\ -1,\ 16,\ 12,\ 23,\ 17)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

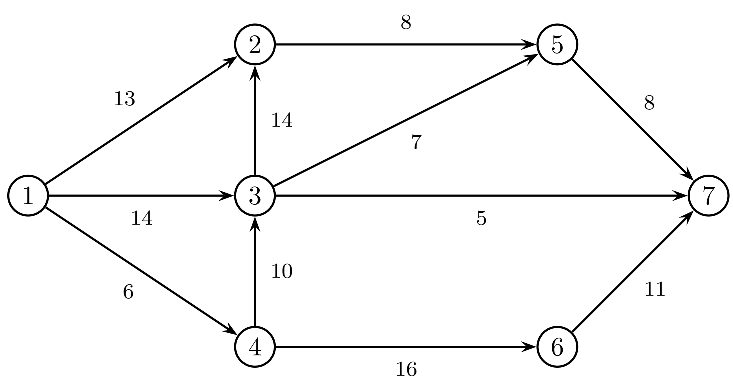
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6)	(1,2) (1,3) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	(0, 5, 10, 0, 3, 4, 6, 0, 0, 1, 0)	(3, 2, 10, 0, 0, 4, 6, 0, 0, 1, 0)
π	(0, 14, 4, 0, 13, 9, 3)	(0, 9, 4, 0, 13, 9, 3)
Arco entrante	(1,2)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	11 , 3	7 , 1
Arco uscente	(3,2)	(6,5)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		4		2		6		5		7	
nodo 2	14	1	7	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	3
nodo 3	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 4	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 5	$+\infty$	-1	21	3	21	3	14	2	14	2	14	2	14	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	8	4	8	4	8	4	8	4	8	4
nodo 7	$+\infty$	-1	20	3	20	3	20	3	18	6	18	6	18	6
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0)	5
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 5, 0, 8, 0, 0, 5, 0, 0, 8, 0)	13
1 - 4 - 6 - 7	6	(8, 5, 6, 8, 0, 0, 5, 0, 6, 8, 6)	19

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 10\ x_2 \\ 16\ x_1 + 12\ x_2 \geq 57 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{56}{9}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 32$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(7, 0)$ $\qquad v_S(P) = 35$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 4\,x_1 + 8\,x_2 \geq 25$

$r = 3$ $\qquad 2\,x_1 + 4\,x_2 \geq 13$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 551 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	5	7	16	8	18	10	13
Volumi	335	128	298	95	254	146	151

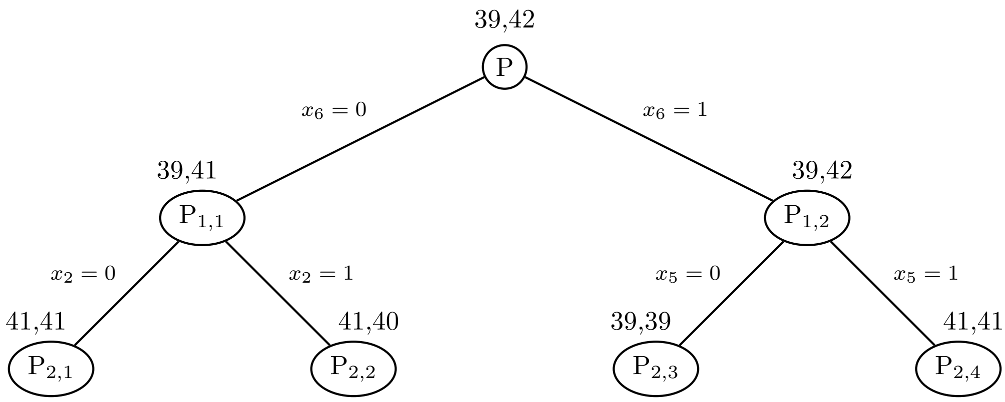
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 39$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, 0, 0, 1, 1, \frac{51}{146}, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 42$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima = $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ valore ottimo = 41

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1 - 4 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(3,\ 0)$	$(0, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(4,\ 0)$	$(0, -2)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)$	$(-1, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(\frac{5}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)$	$(-1, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(4,\ \sqrt{3}\right)$	$(-1, -3)$		SI	SI	NO	NO	NO
$\left(4,\ -\sqrt{3}\right)$	$(-1, -3)$		SI	SI	NO	NO	NO
$(1,\ 0)$	$(-4, 0)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 4\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 + 4\, x_2^2 + 9\, x_1 - 7\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-2, -4)$, $(-2, -1)$, $(5, 0)$ e $(5, -2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(5, -\frac{2}{3}\right)$	$(1, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(0, \frac{67}{3}\right)$	$\frac{2}{67}$	$\frac{2}{67}$	$(5, 0)$