Esame di Ricerca Operativa del 16/02/15

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + 4\ y_2 + 10\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 11\ y_6 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 3\ y_6 = -1 \\ -4\ y_2 + 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{1, 4\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{3,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3.

Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

TV	32"	40"	50"	55"
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.1
Richiesta	1000	700	600	400

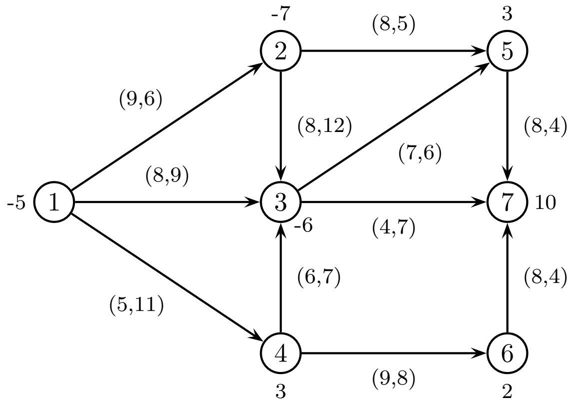
Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB (specificare se sono per il rilassato)

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

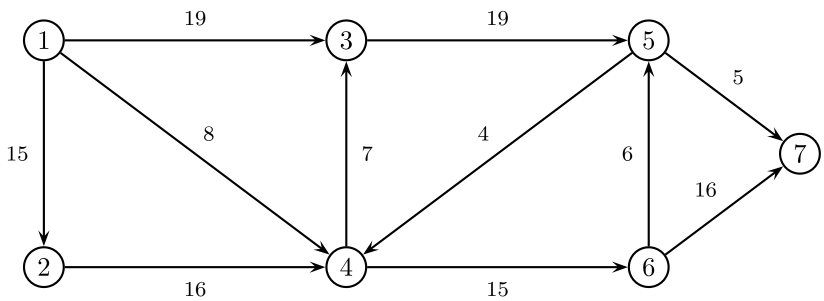


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6)	(4,3)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

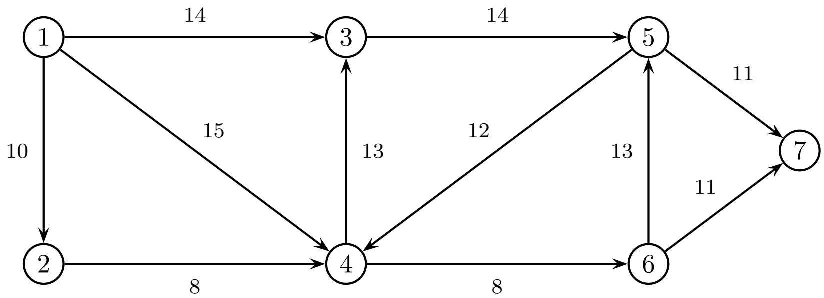
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \leq 47 \\ 16\ x_1 + 19\ x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 418 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	9	5	20	10	24	21	8
Volumi	267	176	352	145	393	340	25

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1 * x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ 0)$							
$(0,\ -1)$							
$(1,\ 0)$							
$(0,\ 1)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\, x_1^2 - 6\, x_1 x_2 + 8\, x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(4, -4)$, $(0, 4)$, $(2, 3)$ e $(-1, -2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + 4\ y_2 + 10\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 11\ y_6 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 3\ y_6 = -1 \\ -4\ y_2 + 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (4,\ -2)$	SI	NO
$\{1,\ 4\}$	$y = \left(-\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{3,\ 6\}$	$\left(-\frac{12}{7},\ \frac{41}{7}\right)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{2}{7},\ 0,\ 0,\ \frac{3}{7}\right)$	4	$\frac{1}{4},\ \frac{3}{5}$	3
2° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$\left(-\frac{23}{8},\ \frac{19}{8}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$	5	$\frac{2}{13}$	6

Esercizio 3.

variabili decisionali: x_{ij} = numero di TV di tipo i prodotti nello stabilimento j, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

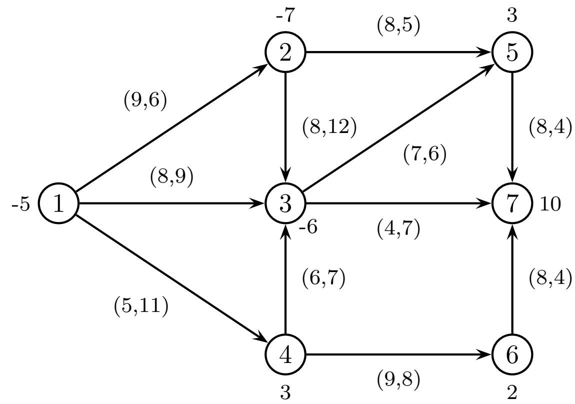
modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A} + x_{1B}) + 600\,(x_{2A} + x_{2B}) + 1000\,(x_{3A} + x_{3B}) + 1500\,(x_{4A} + x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \leq 1600 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \leq 2000 \\ x_{1A} + x_{1B} \geq 1000 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 700 \\ x_{3A} + x_{3B} \geq 600 \\ x_{4A} + x_{4B} \geq 400 \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c= - [ 400 ; 400 ; 600; 600 ; 1000 ; 1000 ; 1500 ; 1500 ]

A=[1.2 0 1.5 0 1.7 0 2 0;1.5 0 1.6 0 1.8 0 2.1 0; -1-1000000;00-1-10000;0000-1-100;000000-1-1]

b=[ 1600 ; 2000 ; -1000 ; -700 ; -600 ; -400 ]

Aeq=[]  beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ]  ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

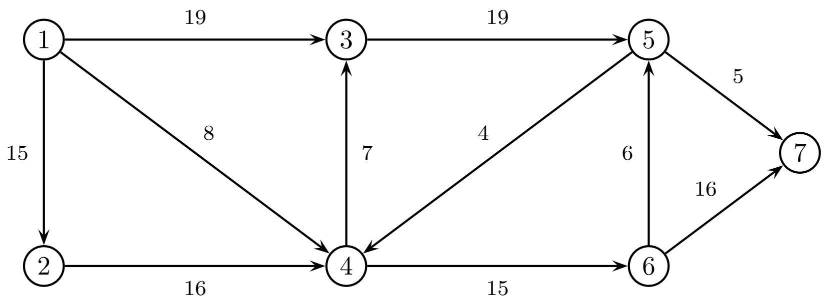


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(2,3)	$x = (0,\ 0,\ 5,\ 12,\ -5,\ 8,\ 10,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6)	(4,3)	$\pi = (0,\ 9,\ 8,\ 5,\ 15,\ 14,\ 12)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

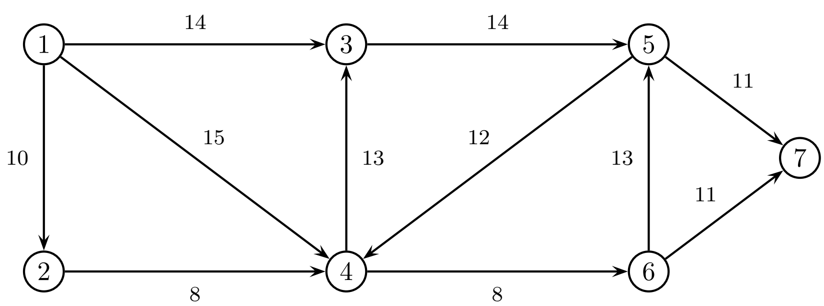
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0)	(0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0)
π	(0, 3, 11, 5, 7, 14, 15)	(0, 0, 8, 5, 4, 14, 12)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 0	0 , 3
Arco uscente	(4,3)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		2		3		6		5		7	
nodo 2	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1	15	1
nodo 3	19	1	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4
nodo 4	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	34	3	29	6	29	6	29	6
nodo 6	$+\infty$	-1	23	4	23	4	23	4	23	4	23	4	23	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	39	6	34	5	34	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		3, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	11	(0, 11, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 11, 0, 0)	11
1 - 4 - 6 - 7	8	(0, 11, 8, 0, 11, 0, 8, 0, 11, 0, 8)	19

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \leq 47 \\ 16\ x_1 + 19\ x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{47}{14}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 33$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(3, 0)$ $\qquad v_I(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 3$
$r = 4$ $\qquad 12\, x_1 + 7\, x_2 \leq 40$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 418 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	9	5	20	10	24	21	8
Volumi	267	176	352	145	393	340	25

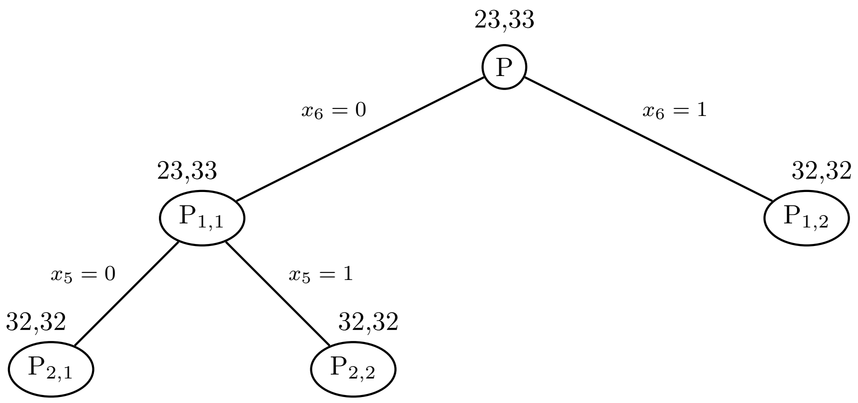
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 23$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, 0, 0, 1, 0, \frac{62}{85}, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 33$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima = $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ valore ottimo = 32

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1 * x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ 0)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ -1)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(1,\ 0)$	$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$		SI	SI	NO	NO	NO
$(0,\ 1)$	$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 4\, x_1^2 - 6\, x_1 x_2 + 8\, x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(4, -4)$, $(0, 4)$, $(2, 3)$ e $(-1, -2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$	$\frac{88}{3}\, x_1 - 3\, x_2$	(-1 ,-2)	$\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$	1	$(-1, -2)$