Esame di Ricerca Operativa del 16/01/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\ y_1 + 9\ y_2 + 9\ y_3 + 7\ y_4 + y_5 + 10\ y_6 \\ -3\ y_1 + 3\ y_2 + 3\ y_3 - y_4 - y_5 + 2\ y_6 = 7 \\ -2\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 + y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{1, 5}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{5,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'azienda vinicola produce due tipi di vino (A e B) i cui prezzi di vendita al litro sono rispettivamente di 2.30 euro e di 4.20 euro. La produzione dei vini richiede due tipi di uve (Cabernet e Sangiovese) che l'azienda acquista rispettivamente al costo di 0.45 euro/kg e 0.30 euro/kg. La manodopera è disponibile in al più 700 ore-uomo con un costo di 15 euro/ora. La tabella seguente indica i kg di uva e le ore di manodopera necessarie per la produzione di un litro di ciascun tipo di vino.

	vino A	vino B
Cabernet	0.8	0.7
Sangiovese	0.5	0.4
manodopera	0.03	0.06

Sapendo che il budget disponibile per l'acquisto delle uve e della manodopera è pari a 140000 euro e supponendo che tutto il vino prodotto sia venduto, si determini la produzione di vino A e di vino B che massimizzi il profitto dell'azienda. (Usare un'equivalenza 1kg=1L)

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

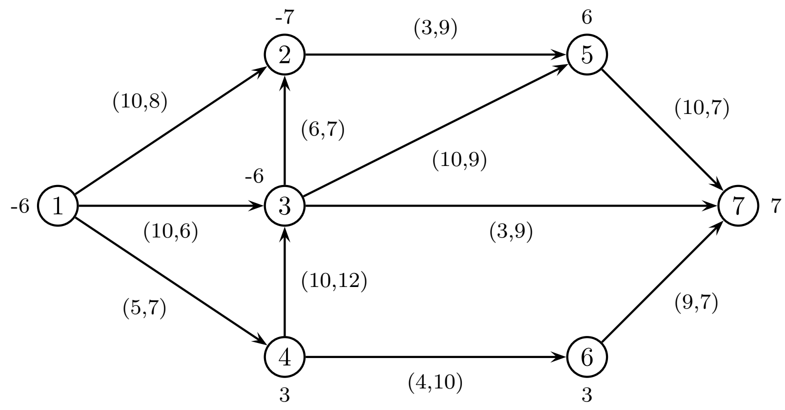
```
c=                      intlinprog=

A=                      b=

Aeq=                    beq=

lb=                     ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(4,3)	$x =$		
(1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7)	(2,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 5\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \leq 68 \\ 11\ x_1 + 18\ x_2 \leq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

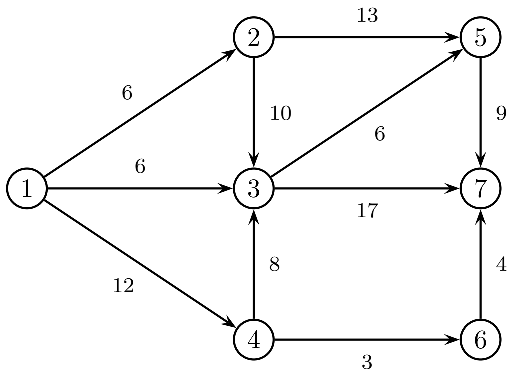
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

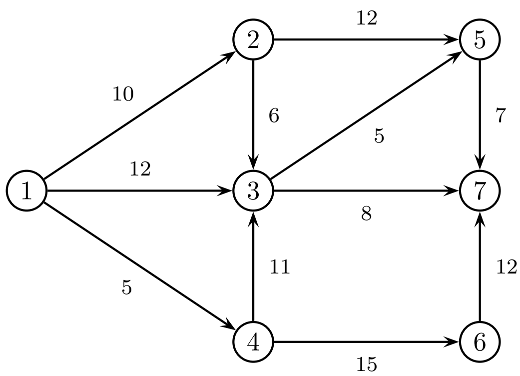
$r =$	taglio:

Esercizio 7. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	14	15	6	5	8	7	22
Volumi	136	105	47	49	456	439	262

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \cdot x_2 \leq 0, \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(-1,0)							
(0,1)							
(0,-1)							
(1,0)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\,x_1\,x_2 - 9\,x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1, -2)$, $(-2, 4)$, $(1, 4)$ e $(-4, -1)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(1, 2)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\,y_1 + 9\,y_2 + 9\,y_3 + 7\,y_4 + y_5 + 10\,y_6 \\ -3\,y_1 + 3\,y_2 + 3\,y_3 - y_4 - y_5 + 2\,y_6 = 7 \\ -2\,y_1 - 2\,y_2 + y_3 + 3\,y_4 + y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\,2\}$	$x = (1,\ -3)$	SI	NO
$\{1,\,5\}$	$y = (-4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{5,\,6\}$	$(-1,\ 12)$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 8)$	4	$\frac{9}{7},\ \frac{8}{3}$	5
2° iterazione	$\{4,\,6\}$	$\left(\frac{23}{7},\ \frac{24}{7}\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{9}{7},\ 0,\ \frac{29}{7}\right)$	3	$\frac{29}{10}$	6

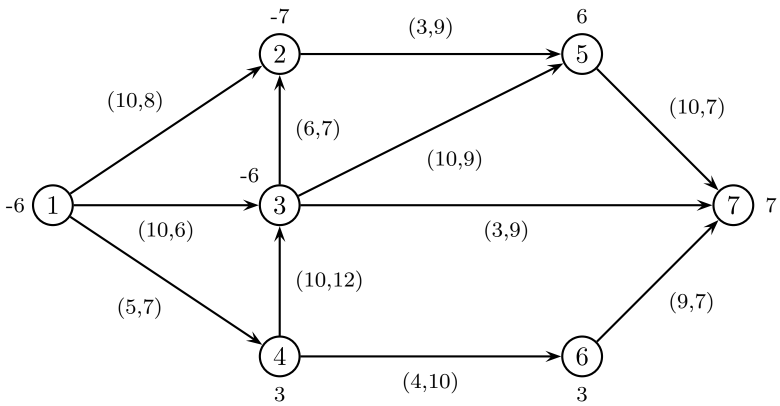
Esercizio 3.

$$\begin{cases} \max\ (2.3x_A + 4.2x_B) - (0.45x_A + 0.9x_B) - (0.36x_A + 0.315x_B) - (0.15x_A + 0.12x_B) \\ 0.03x_A + 0.06x_B \leq 700 \\ (0.45x_A + 0.9x_B) + (0.36x_A + 0.315x_B) + (0.15x_A + 0.12x_B) \leq 140000 \end{cases}$$

Le spese sono: $(0.45x_A + 0.9x_B)$ (manodopera) $(0.36x_A + 0.315x_B)$ (cabernet) $(0.15x_A + 0.12x_B)$ (sangiovese)

0.8X0.45=0.36, 0.7X0.45=0.315 (cabernet) 0.5X0.3=0.15, 0.4X0.3=0.12 (sangiovese)

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(4,3)	$x = (-19,\ 0,\ 25,\ -12,\ 0,\ 18,\ 0,\ 12,\ 10,\ 0,\ 7)$	NO	SI
(1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7)	(2,5)	$\pi = (0,\ 10,\ 4,\ -6,\ 14,\ -2,\ 7)$	SI	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7) (6,7)
Archi di U	(2,5)	(2,5)
x	$(0,\ 0,\ 6,\ 9,\ 2,\ 4,\ 0,\ 0,\ 3,\ 7,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 6,\ 9,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 3,\ 3,\ 0)$
π	$(0,\ 4,\ -2,\ 5,\ 8,\ 9,\ 18)$	$(0,\ 21,\ 15,\ 5,\ 8,\ 9,\ 18)$
Arco entrante	(3,7)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 4	5 , 0
Arco uscente	(3,5)	(6,7)

Esercizio 6. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 5\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \leq 68 \\ 11\ x_1 + 18\ x_2 \leq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{68}{13}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 68$

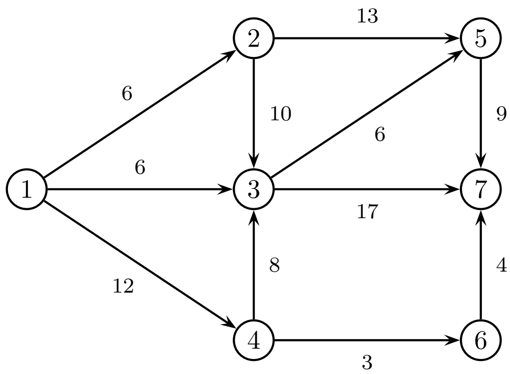
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(5, 0)$ $\qquad v_I(P) = 65$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

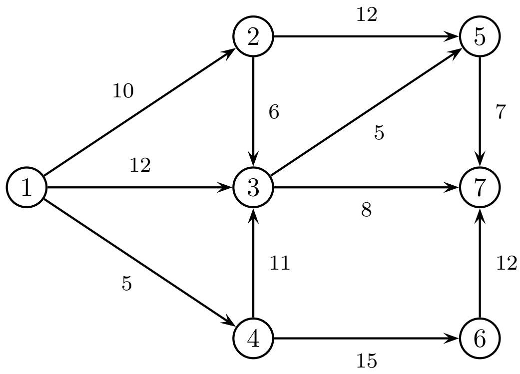
$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 5$
$r = 4$ $\qquad 2\,x_1 + x_2 \leq 10$

Esercizio 7. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		4		5		6		7	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	19	2	12	3	12	3	12	3	12	3	12	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	15	4	15	4	15	4	15	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	3	23	3	21	5	19	6	19	6
insieme Q	2, 3, 4		3, 4, 5		4, 5, 7		5, 6, 7		6, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	8	(0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0)	8
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 8, 0, 0, 7, 0, 8, 0, 0, 7, 0)	15
1 - 4 - 6 - 7	5	(7, 8, 5, 0, 7, 0, 8, 0, 5, 7, 5)	20

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	14	15	6	5	8	7	22
Volumi	136	105	47	49	456	439	262

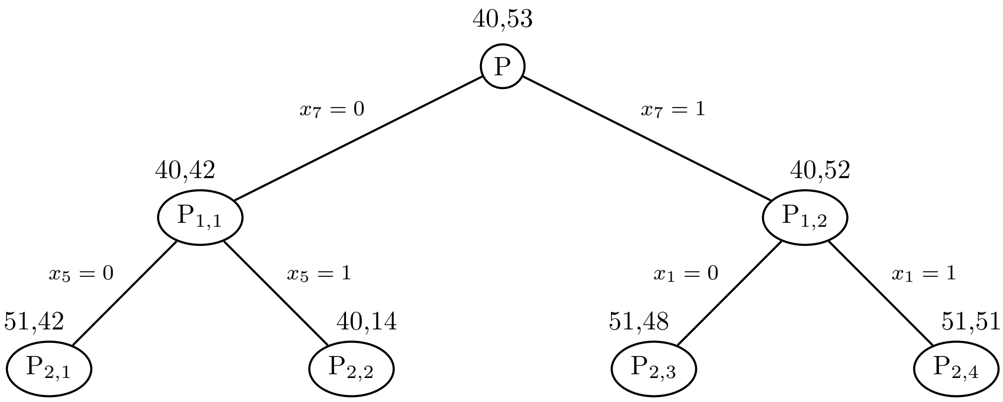
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ $\qquad v_I(P) = 40$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, 1, 1, 0, 0, \dfrac{83}{131}\right)$ $\qquad v_S(P) = 53$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 51$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 \leq 0, \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ 0)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ 1)$	$(-1, 0)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0,\ -1)$	$(1, 0)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(1,\ 0)$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1\,x_2 - 9\ x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1,-2)$, $(-2,4)$, $(1,4)$ e $(-4,-1)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(1,2)$	$(1,0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(0,1)$	2	2	$(1,4)$