Esame di Ricerca Operativa del 15/09/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 3\ x_1 + x_2 \\ x_1 + 3\ x_2 \leq -10 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ 2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 31 \\ -3\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 5 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{1, 5\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{2,4}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Una ditta deve prendere in affitto il seguente numero di macchine in ogni trimestre dell'anno

GEN-MAR	APR-GIU	LUG-SET	OTT-DIC
9	5	7	8

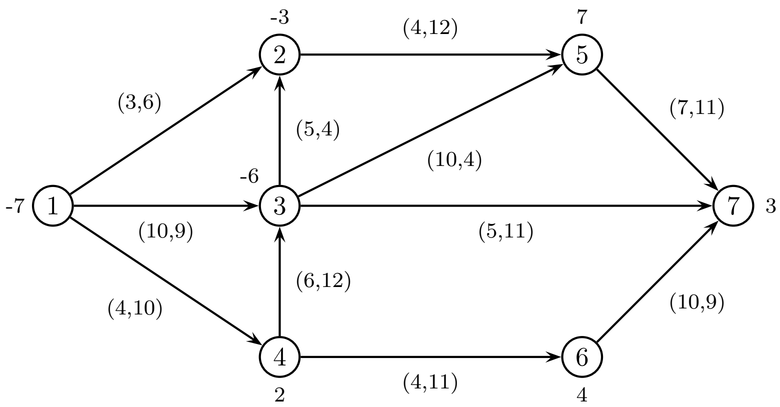
Le macchine possono essere prese in affitto per un trimestre al costo di 4000 euro, per due trimestri al costo di 7000 euro o per tre trimestri al costo di 9000 euro. Si vuole minimizzare il costo complessivo di affitto pianificando un anno.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

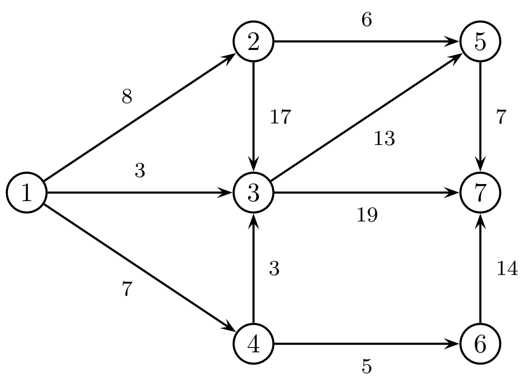


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x =$		
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

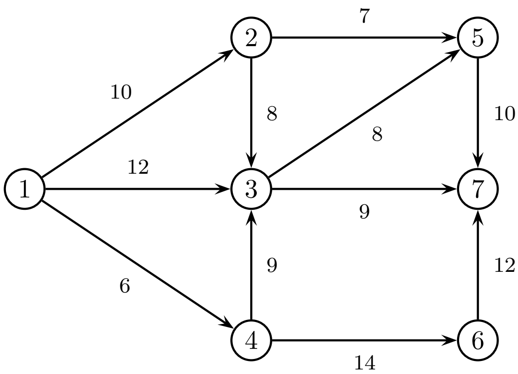
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \leq 49 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \leq 66 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	91	58
3			8	11
4				7

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{45}, x_{34}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$							
$(0,\ 0)$							
$(2,\ 0)$							
$(-2,\ 0)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 3\,x_1 + 10\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(2,5)$, $(-4,-3)$, $(0,-1)$ e $(-3,-4)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$					

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 3\ x_1 + x_2 \\ x_1 + 3\ x_2 \leq -10 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ 2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 31 \\ -3\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 5 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (2,\ -4)$	SI	NO
$\{1,\ 5\}$	$y = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{8}{3},\ 0\right)$	SI	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{2,\ 4\}$	$(1,\ -6)$	$(0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0)$	4	$5,\ 20$	1
2° iterazione	$\{1,\ 2\}$	$(2,\ -4)$	$\left(\frac{5}{7},\ -\frac{8}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$	2	$\frac{35}{3},\ 7$	5

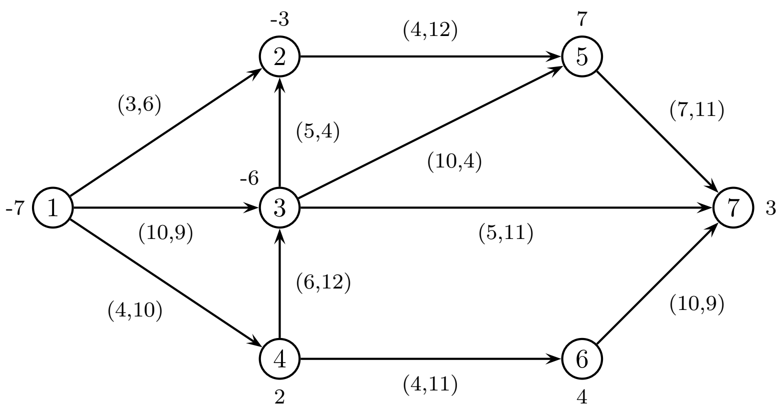
Esercizio 3.

variabili decisionali: x1=numero di macchine a gennaio per un trimestre, x2=numero di macchine a gennaio per due trimestri, x3=numero di macchine a gennaio per tre trimestri, x4=numero di macchine ad aprile per un trimestre, x5=numero di macchine ad aprile per due trimestri, x6=numero di macchine ad aprile per tre trimestri, x7=numero di macchine a luglio per un trimestre, x8=numero di macchine a luglio per due trimestri, x9=numero di macchine ad ottobre per un trimestre,

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 4000 ; 7000 ; 9000 ; 4000 ; 7000 ; 9000 ; 4000 ; 7000 ; 4000 ]

A=[-1 -1 -1 0 0 0 0 0 0; 0 -1 -1 -1 -1 -1 0 0 0; 0 0 -1 0 -1 -1 -1 -1; 0 0 0 0 0 -1 0 -1 -1]

b=[-9 ; -5 ; -7 ; -8]

intcon = [1 2 3 4 5 6 7 8 9]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0; 0 ;0 ;0 ;0 ; 0]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

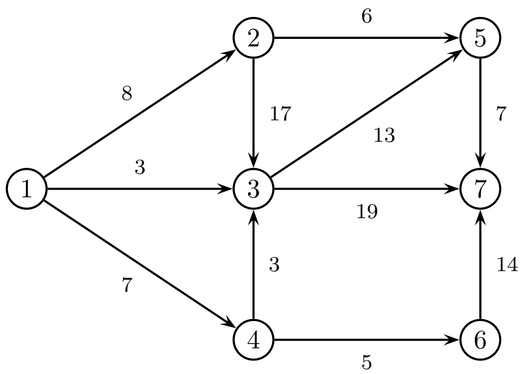


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(3,7)	$x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$	NO	SI
(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$	NO	SI

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

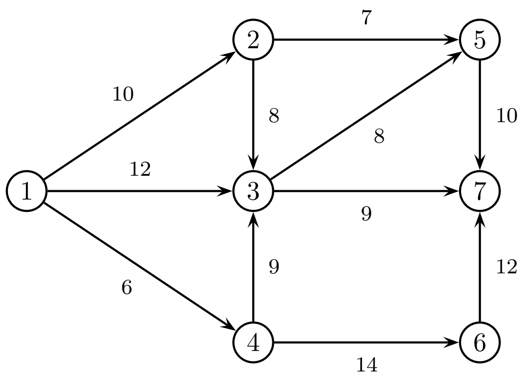
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1)	(0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0)
π	(0, 3, 13, 4, 7, 8, 18)	(0, 3, 10, 4, 7, 8, 15)
Arco entrante	(1,3)	(3,5)
ϑ^+, ϑ^-	9 , 1	6 , 1
Arco uscente	(6,7)	(1,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		4		2		6		5		7	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
nodo 4	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 5	$+\infty$	-1	16	3	16	3	14	2	14	2	14	2	14	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 7	$+\infty$	-1	22	3	22	3	22	3	22	3	21	5	21	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5, 7		2, 5, 6, 7		5, 6, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 7	9	(0, 9, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0)	9
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 9, 0, 0, 7, 0, 9, 0, 0, 7, 0)	16
1 - 3 - 5 - 7	3	(7, 12, 0, 0, 7, 3, 9, 0, 0, 10, 0)	19
1 - 4 - 6 - 7	6	(7, 12, 6, 0, 7, 3, 9, 0, 6, 10, 6)	25

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \le 49 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \le 66 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{49}{13}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 45$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $\qquad v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \le 3$
$r = 4$ $\qquad 6\,x_1 + 3\,x_2 \le 22$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		16	91	58
3			8	11
4				7

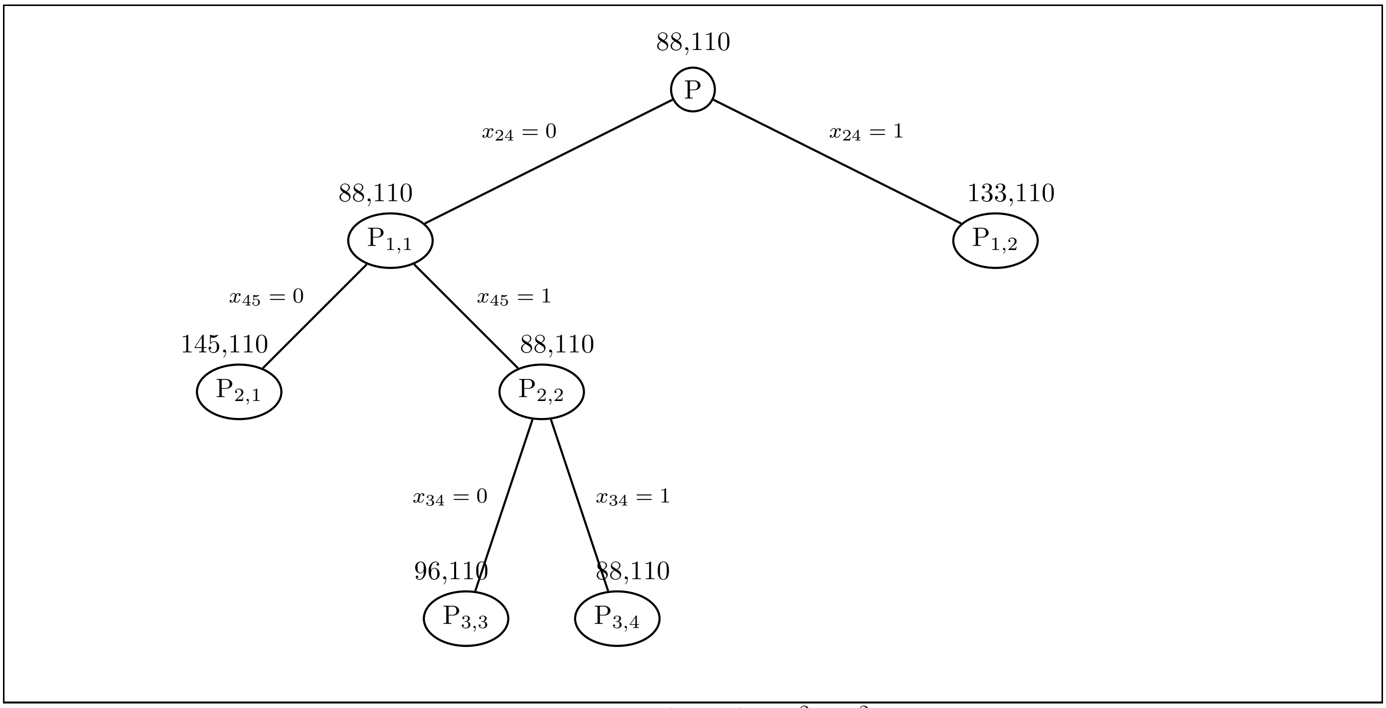
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (1 , 5) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 88$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 − 1 − 3 − 4 − 5 $\qquad v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{24}, x_{45}, x_{34}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad x_2 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -2)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ 0)$	$(0, -6)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(2,\ 0)$	$(-1, -6)$		SI	SI	NO	NO	NO
$(-2,\ 0)$	$(-1, -6)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\, x_1^2 - 6\, x_1 x_2 + 4\, x_2^2 + 3\, x_1 + 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(2,5)$, $(-4,-3)$, $(0,-1)$ e $(-3,-4)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$	$21\, x_1 + \frac{58}{3}\, x_2$	(-4 ,-3)	$\left(-2, -\frac{8}{3}\right)$	1	$(-4, -3)$