Esame di Ricerca Operativa del 15/01/19

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale:

$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 - x_2 \\ -6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\ 4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\ -2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 19 \end{cases}$$

	Base	x	Degenere?	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° passo	{4,5}						
2° passo							

Esercizio 2. Una ditta produce tre tipi di giubbotti A, B e C. Per due di essi utilizza un materiale tecnico che puó acquistare al prezzo di 50 euro al Kg. Il fornitore puó al massimo fornire 1000 kg di tale materiale al mese. La quantitá di materiale richiesta per produrre 1 giubbotto, i costi di manodopera (per giubbotto) ed i prezzi di vendita al pubblico (per giubbotto) sono indicati nella seguente tabella.

	Materiale	manodopera	prezzo
A	-	30	80
B	0.3	18	50
C	0.4	10	40

Esigenze di mercato impongono che i giubbotti di tipo A prodotti devono essere almeno il doppio di quelli di tipo B e non superiori a quelli di tipo C. Scrivere un modello che determini un piano produttivo che massimizzi i guadagni.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

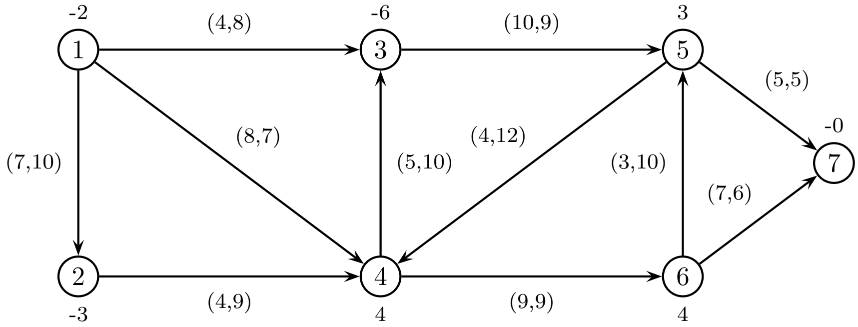
```
c=                          intcon=

A=                          b=

Aeq=                        beq=

lb=                         ub=
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (4,3) (4,6) (5,4) (6,7)	
Archi di U	(3,5)	
x		
degenere?		
π		
degenere?		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 13\ x_1 + 7\ x_2 \\ 14\ x_1 + 13\ x_2 \geq 61 \\ 9\ x_1 + 19\ x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_I(P) =$

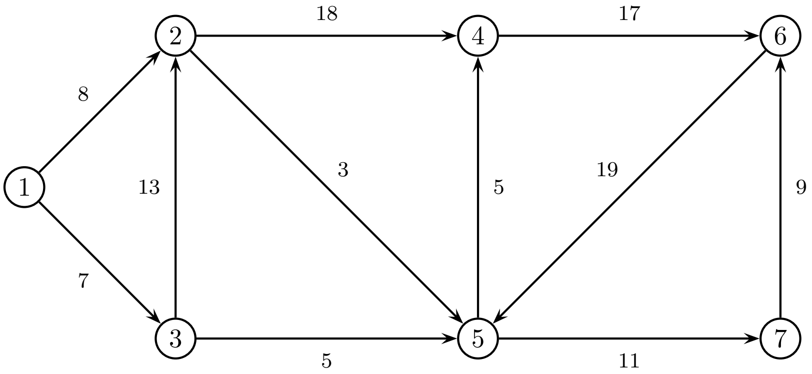
b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

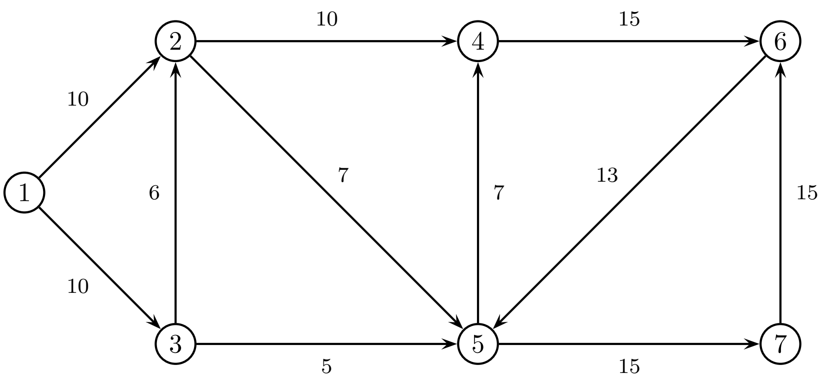
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 511 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	5	15	10	8	20	13	23
Volumi	120	4	114	25	37	156	307

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 16 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{8\sqrt{13}}{13}, -\frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$							
$\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$							
$\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\, x_1^2 + 4\, x_1\, x_2 - 10\, x_1 - 3\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-2, 1)$, $(0, 4)$, $(-2, -4)$ e $(5, -4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{1}{3}, -4\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 5\}$	$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{5}{6},\ -\frac{13}{6},\ 0\right)$	4	$12,\ \frac{77}{3},\ 132,\ 132$	1
2° iterazione	$\{1,\ 5\}$	$\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$	$\left(\frac{5}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{27}{4},\ 0\right)$	5	$2,\ \frac{80}{11},\ \frac{80}{7}$	2

Esercizio 2.

COMANDI DI MATLAB

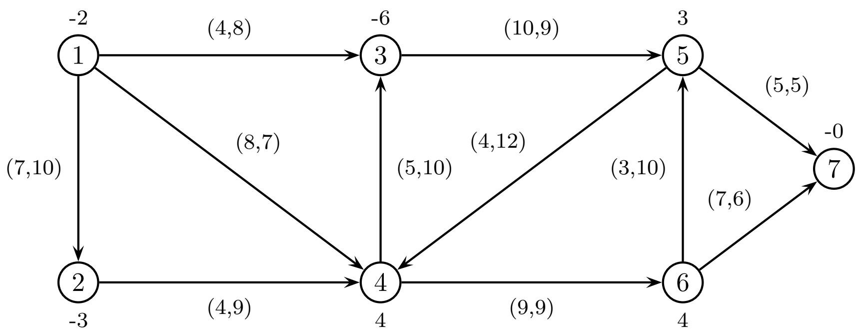
```
c=[-50; -17; -10]                          intcon=[1 2 3]

A=[0 0.3 0.4; -1 2 0; 1 0 -1               b=[1000; 0; 0]

Aeq=[]                                     beq=[]

lb=[0; 0; 0]                               ub=[]
```

Esercizio 3. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (4,3) (4,6) (5,4) (6,7)	(1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7)
Archi di U	(3,5)	
x	$(0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 9,\ 1,\ 4,\ 6,\ 0,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 8,\ 0,\ 4,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0)$
π	$(0,\ -5,\ 4,\ -1,\ -5,\ 8,\ 15)$	$(0,\ 14,\ 4,\ 18,\ 14,\ 27,\ 34)$
Arco entrante	(3,5)	(1,2)
ϑ^+, ϑ^-	Inf , 1	6 , 2
Arco uscente	(4,3)	(1,3)

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\,x_1 + 7\,x_2 \\ 14\,x_1 + 13\,x_2 \geq 61 \\ 9\,x_1 + 19\,x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{61}{13}\right)$ $\qquad v_I(P) = 33$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

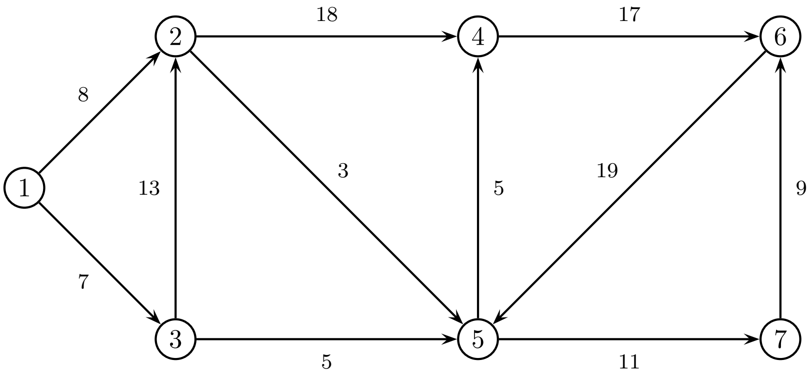
sol. ammissibile = $(0, 5)$ $\qquad v_S(P) = 35$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 13\,x_1 + 12\,x_2 \geq 57$

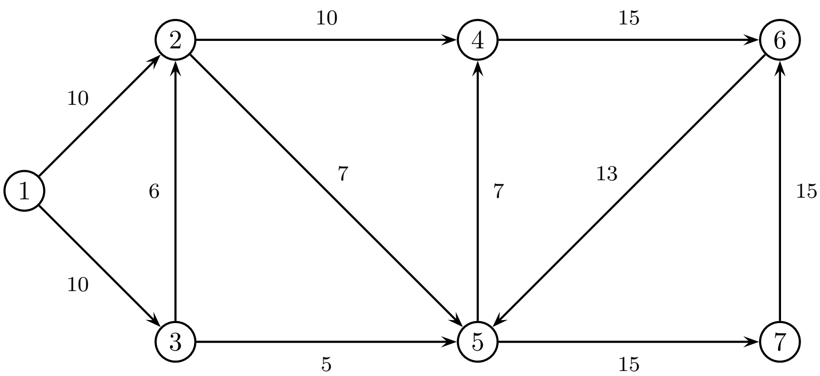
$r = 4$ $\qquad 8\,x_1 + 7\,x_2 \geq 33$

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		7		6	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	16	5	16	5	16	5	16	5
nodo 5	$+\infty$	-1	12	3	11	2	11	2	11	2	11	2	11	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	33	4	31	7	31	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	22	5	22	5	22	5	22	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	7	(7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0)	7
1 - 3 - 5 - 7	5	(7, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 0, 12, 0, 0)	12
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	3	(10, 5, 3, 7, 0, 5, 3, 0, 15, 3, 0)	15

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 6. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 511 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	5	15	10	8	20	13	23
Volumi	120	4	114	25	37	156	307

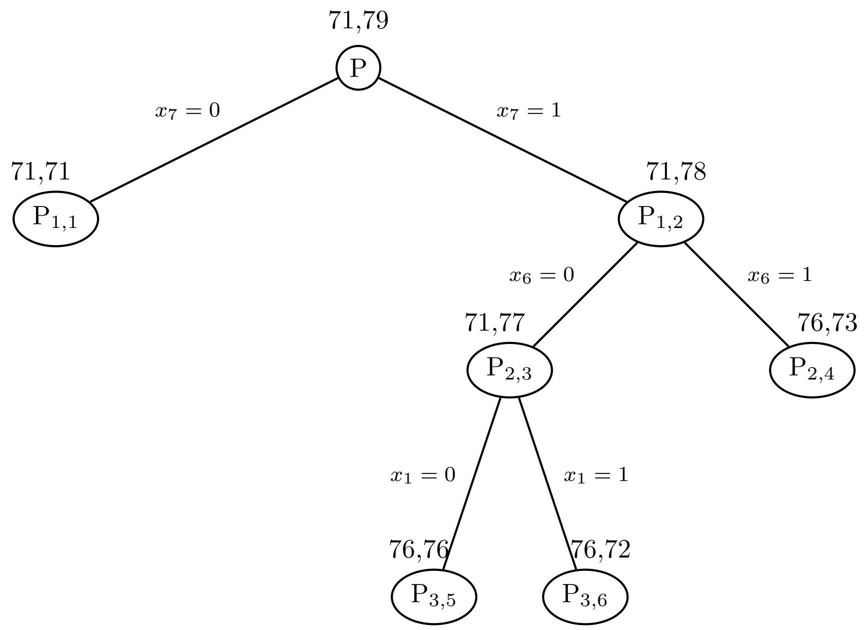
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1,1,1,1,1,1,0)$ $v_I(P) = 71$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0,1,1,1,1,1,\frac{175}{307}\right)$ $v_S(P) = 79$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (0,1,1,1,1,0,1)$ valore ottimo $= 76$

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 16 - x_1^2 - x_2^2 \le 0, \quad -x_1 + 2x_2 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$\left(-\frac{8\sqrt{13}}{13}, -\frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{13}}{8}, 0\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$	$\left(-\frac{7\sqrt{5}}{40}, -\frac{4}{5}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$	$\left(\frac{7\sqrt{5}}{40}, -\frac{4}{5}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 10\,x_1 - 3\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-2,1)$, $(0,4)$, $(-2,-4)$ e $(5,-4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{1}{3}, -4\right)$	$(0,-1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{74}{3}, 0\right)$	$\frac{7}{37}$	$\frac{7}{37}$	$(5,-4)$