Esame di Ricerca Operativa del 15/01/16

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -3\ x_1 - 4\ x_2 \leq 4 \\ -5\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 3\ x_1 + 4\ x_2 \leq 26 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 13 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 16 \\ -3\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{1, 6\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{4,6}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'impresa produce un bene in due stabilimenti situati a Milano e a Brescia. La produzione viene immagazzinata in tre depositi a Cremona, a Pavia e a Monza e poi distribuita alla vendita al dettaglio. La tabella mostra il costo unitario di trasporto, la capacità produttiva massima degli stabilimenti e le quantità di vendita al dettaglio di ogni deposito.

	Cremona	Pavia	Monza	Capacità
Milano	15	14	13	300
Brescia	18	19	20	200
Vendita	210	130	150	

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

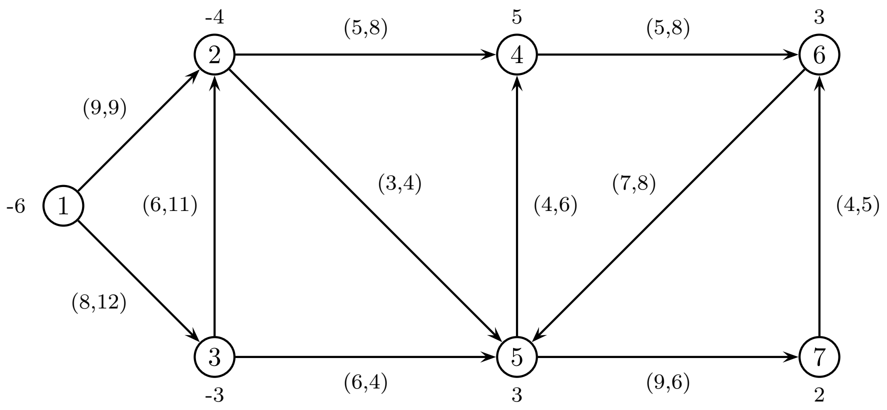
```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

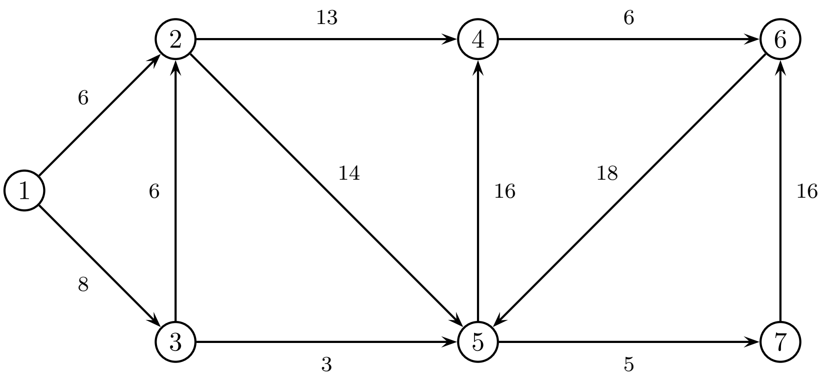


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(3,2)	$x =$		
(1,3) (2,5) (3,2) (5,4) (6,5) (7,6)	(5,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

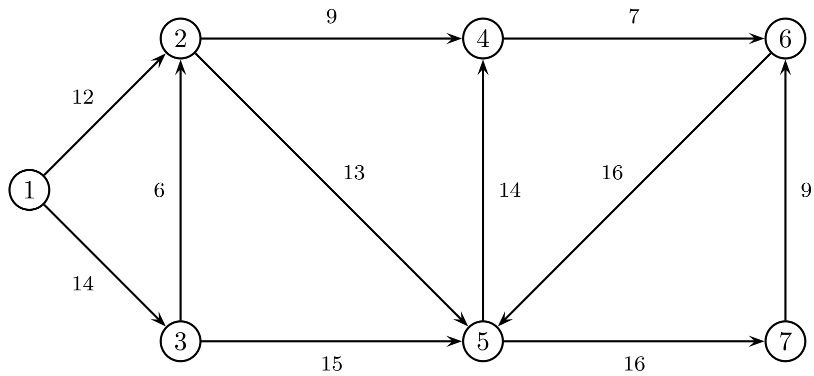
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (7,6)	
Archi di U	(2,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 10\ x_2 \\ 15\ x_1 + 11\ x_2 \geq 65 \\ 8\ x_1 + 14\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{15}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 2 \le 0, \quad 2x_1 - x_2 - 1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(1,\ 1)$							
$\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$							
$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 8\ x_1 x_2 + 4\ x_2^2 - 3\ x_1 + 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-5, 0)$, $(-5, -4)$, $(4, 3)$ e $(-3, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{11}{3}, 2\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -3\ x_1 - 4\ x_2 \le 4 \\ -5\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 3\ x_1 + 4\ x_2 \le 26 \\ -x_1 + 3\ x_2 \le 13 \\ 3\ x_1 - x_2 \le 16 \\ -3\ x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (0,\ -1)$	SI	NO
$\{1,\ 6\}$	$y = \left(\frac{8}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{5}\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{4,\ 6\}$	$(-1,\ 4)$	$(0,\ 0,\ 0,\ -3,\ 0,\ 2)$	4	$\frac{136}{15},\ 0$	2
2° iterazione	$\{2,\ 6\}$	$(-1,\ 4)$	$(0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ -4)$	6	$8,\ 23$	1

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

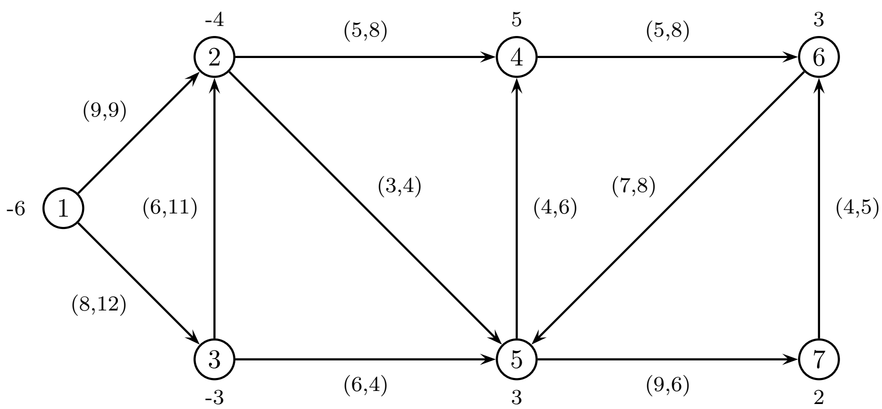
```
c=[ 15 ; 14 ; 13 ; 18 ; 19 ; 20 ]

A=[111000; 000111 ]                          b=[ 300 ; 200 ]

Aeq=[100100; 010010 ; 001001 ]               beq=[ 210 ; 130 ; 150]

lb=[ 0; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0]                   ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

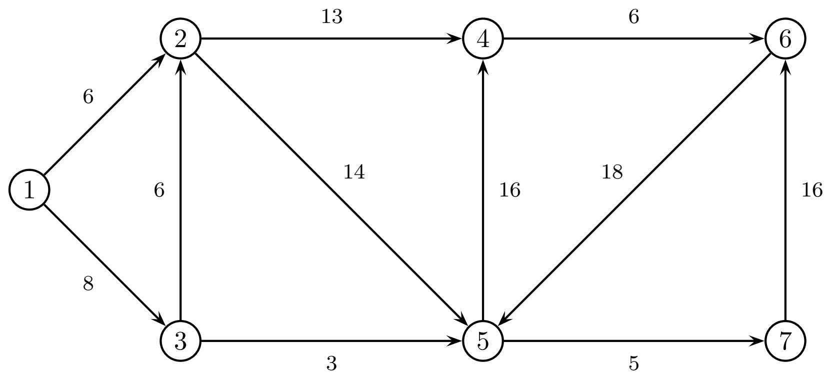


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5)	(3,2)	$x = (6,\ 0,\ 21,\ 0,\ 11,\ -8,\ 16,\ 0,\ 2,\ 13,\ 0)$	NO	NO
(1,3) (2,5) (3,2) (5,4) (6,5) (7,6)	(5,7)	$\pi = (0,\ 14,\ 8,\ 21,\ 17,\ 10,\ 6)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

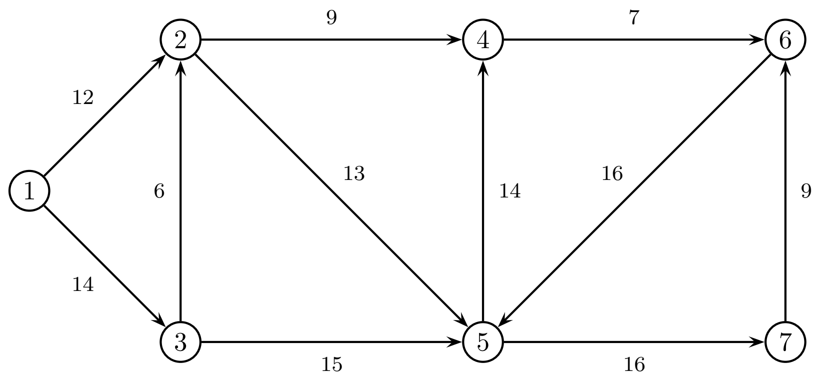
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (7,6)	(1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) (7,6)
Archi di U	(2,5)	(2,4)
x	(6, 0, 6, 4, 0, 3, 1, 0, 4, 0, 2)	(6, 0, 8, 2, 0, 3, 3, 0, 2, 0, 0)
π	(0, 9, 0, 14, 6, 19, 15)	(0, 9, 6, 20, 12, 25, 21)
Arco entrante	(2,5)	(5,4)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	5 , 0
Arco uscente	(2,4)	(7,6)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		2		3		5		7		4		6	
nodo 2	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
nodo 3	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 4	$+\infty$	-1	19	2	19	2	19	2	19	2	19	2	19	2
nodo 5	$+\infty$	-1	20	2	11	3	11	3	11	3	11	3	11	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	32	7	25	4	25	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	16	5	16	5	16	5	16	5
insieme Q	2, 3		3, 4, 5		4, 5		4, 7		4, 6		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	12	(12, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 0, 12, 0, 0)	12
1 - 3 - 5 - 7	4	(12, 4, 0, 12, 0, 4, 0, 0, 16, 0, 0)	16

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 10\ x_2 \\ 15\ x_1 + 11\ x_2 \geq 65 \\ 8\ x_1 + 14\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{459}{122}, \frac{95}{122}\right)$	$v_I(P) = 50$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (4, 1)$	$v_S(P) = 54$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$	$14\,x_1 + 11\,x_2 \geq 62$
$r = 2$	$8\,x_1 + 13\,x_2 \geq 41$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	10	41	62	92
2		27	54	56
3			11	13
4				94

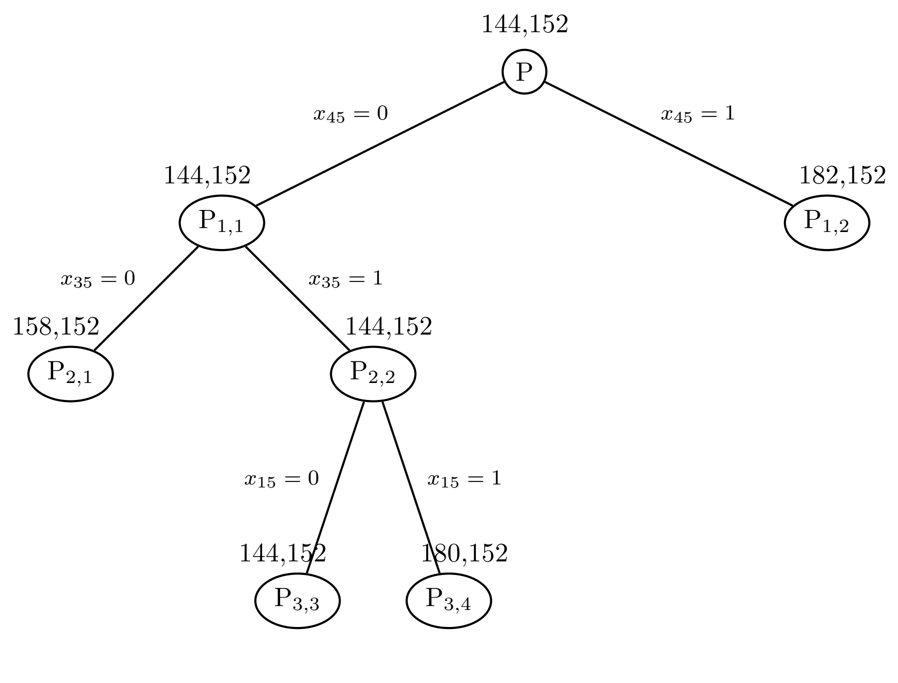
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: (1 , 2) (2 , 4) (2 , 5) (3 , 4) (3 , 5)	$v_I(P) = 144$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $4 - 3 - 5 - 2 - 1$	$v_S(P) = 152$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{45}, x_{35}, x_{15}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \quad 2x_1 - x_2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(1,\ 1)$	$\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$	$\left(-\frac{1}{6}, \frac{22}{15}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 8\ x_1\, x_2 + 4\ x_2^2 - 3\ x_1 + 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-5, 0)$, $(-5, -4)$, $(4, 3)$ e $(-3, 3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{11}{3}, 2\right)$	$(-3, 2)$	$\begin{pmatrix} 4/13 & 6/13 \\ 6/13 & 9/13 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{116}{39}, \frac{58}{13}\right)$	$\frac{13}{58}$	$\frac{13}{184}$	$\left(-\frac{159}{46}, \frac{213}{92}\right)$