Esame di Ricerca Operativa del 14/06/16

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq -13 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{2, 5\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,4}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un caporeparto di una fabbrica deve decidere la composizione della sua squadra, avendo a disposizione operai, robot e terne composte da 2 operai + 1 robot. Nel reparto si producono quattro tipi di beni A, B, C e D, e bisogna produrre almeno 55 unitá di bene A, 20 di bene B, 20 di bene C e 50 di bene D. Ciascun operaio, robot o terna puó produrre ogni bene. Nella seguente tabella sono riportati i numeri di operai, robot e terne (2 operai +1 robot), necessari per produrre singolarmente un'unitá di ciascuno dei beni A, B, C e D. Nella tabella sono riportati anche i costi di manutenzione (per i robot), il salario (per un operaio) ed il costo globale di una terna che sono da minimizzare tenendo in considerazione che il numero totale di operai deve essere almeno 3 volte piú grande del numero di robot.

	operai	robot	terne
A	8	4	2
B	15	10	6
C	4	2	0.5
D	4	3	1
costi	8	7	20

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

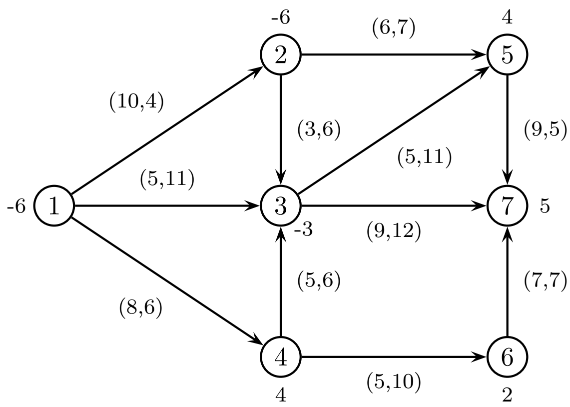
```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

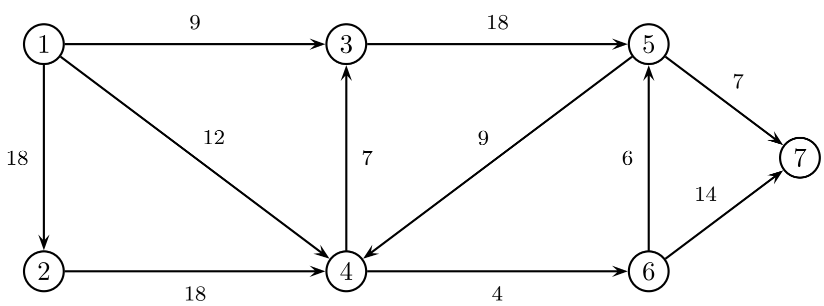


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,2)	$x =$		
(1,2) (1,3) (2,5) (4,3) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

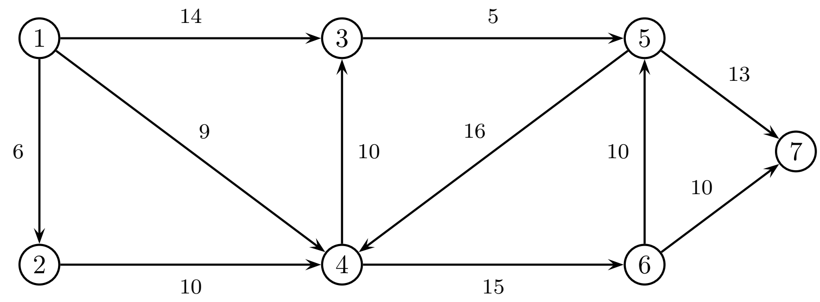
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 5\ x_2 \\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \leq 58 \\ 8\ x_1 + 13\ x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 458 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	24	22	23	10	11	18
Volumi	354	315	48	291	31	65	64

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(0,-1)							
(1,0)							
(-1,0)							
(0,1)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1^2 - 6\ x_2^2 - 3\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(4, -4)$, $(-3, 3)$, $(-4, 1)$ e $(1, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq -13 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (1,\ -6)$	SI	NO
$\{2,\ 5\}$	$y = \left(0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{5},\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\ 4\}$	$(3,\ -9)$	$\left(0,\ 0,\ \frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0\right)$	4	$3,\ 8$	1
2° iterazione	$\{1,\ 3\}$	$(2,\ -8)$	$(2,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0)$	3	$1,\ 8$	2

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

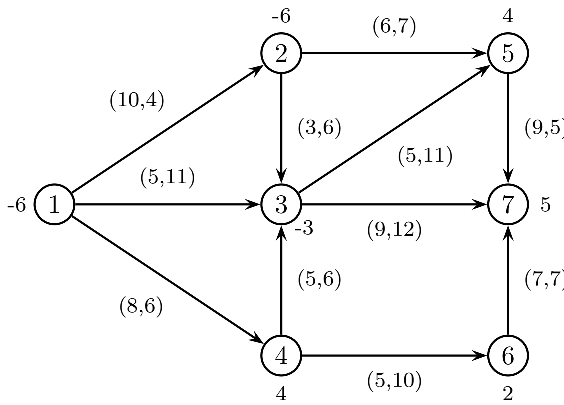
```
c=[ 8 ; 7 ; 20 ]                                                    int=[ 1 ; 2 ; 3 ]

A=[-1/8 -1/4 -1/3;-1/15 -1/10 -1/6;-1/4 -1/2 -2;-1/4 -1/3 -1;-1 3 1]    Aeq=[]

b=[ -55 ; -20 ; -20 ; -50 ; 0]                                      beq=[]

lb=[ 0 ; 0 ; 0 ]                                                    ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

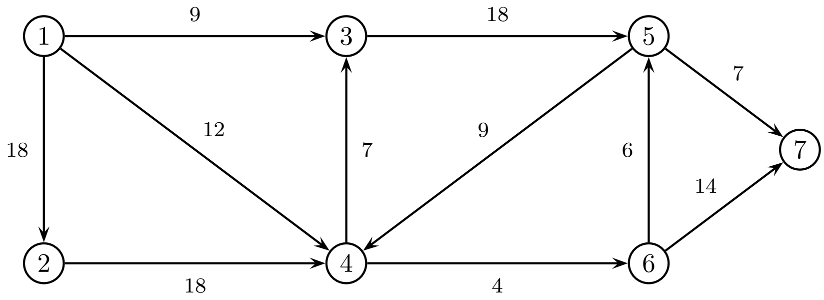


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (2,3) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,2)	$x = (4,\ 2,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 11,\ -4,\ 0,\ -4,\ -2)$	NO	NO
(1,2) (1,3) (2,5) (4,3) (5,7) (6,7)	(3,7)	$\pi = (0,\ 10,\ 5,\ 0,\ 16,\ 18,\ 25)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

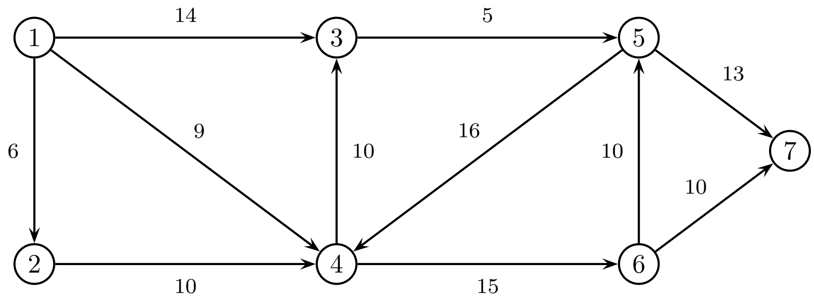
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(0, 0, 6, 0, 6, 3, 0, 0, 2, 5, 0)	(0, 0, 6, 0, 6, 3, 0, 0, 2, 5, 0)
π	(0, 10, 11, 8, 16, 13, 20)	(0, 4, 5, 8, 10, 13, 14)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	11 , 0	12 , 3
Arco uscente	(6,7)	(3,5)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		4		6		2		5		7	
nodo 2	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1
nodo 3	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
nodo 4	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1
nodo 5	$+\infty$	-1	27	3	27	3	22	6	22	6	22	6	22	6
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	6	30	6	29	5	29	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 4, 5		2, 5, 6		2, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	5	(0, 5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0)	5
1 - 4 - 6 - 7	9	(0, 5, 9, 0, 5, 0, 9, 0, 5, 0, 9)	14
1 - 2 - 4 - 6 - 7	1	(1, 5, 9, 1, 5, 0, 10, 0, 5, 0, 10)	15
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	5	(6, 5, 9, 6, 5, 0, 15, 0, 10, 5, 10)	20

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $\quad N_t = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 5\,x_2 \\ 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 58 \\ 8\,x_1 + 13\,x_2 \le 54 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{29}{6}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 43$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (4, 0)$ $\qquad v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \le 4$

$r = 4$ $\qquad 4\,x_1 + 2\,x_2 \le 19$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 458 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	15	24	22	23	10	11	18
Volumi	354	315	48	291	31	65	64

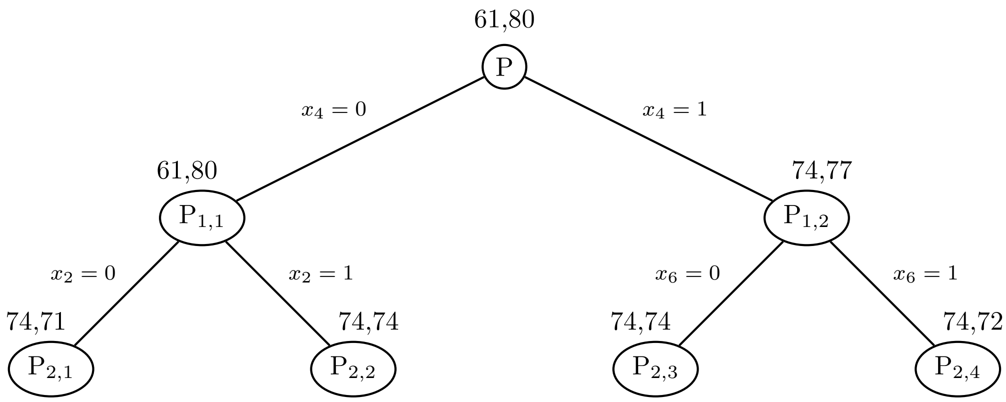
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 61$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, 0, 1, \frac{250}{291}, 1, 1, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 80$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 74$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(0,\ -1)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(1,\ 0)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	SI	NO
$(-1,\ 0)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$		NO	SI	NO	NO	NO
$(0,\ 1)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1^2 - 6\ x_2^2 - 3\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(4, -4)$, $(-3, 3)$, $(-4, 1)$ e $(1, 3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$	$(-2, 1)$	$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{37}{5}, -\frac{74}{5}\right)$	$\frac{10}{111}$	$\frac{10}{111}$	$(-4, 1)$