Esame di Ricerca Operativa del 14/06/16

(Cognome)	(Nome)	(Corso di laurea)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq -13 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3\ x_2 \leq -12 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{5, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	{3,5}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un caporeparto di una fabbrica deve decidere la composizione della sua squadra, avendo a disposizione operai, robot e terne composte da 2 operai + 1 robot. Nel reparto si producono quattro tipi di beni A, B, C e D, e bisogna produrre almeno 50 unitá di bene A, 25 di bene B, 25 di bene C e 55 di bene D. Ciascun operaio, robot o terna puó produrre ogni bene. Nella seguente tabella sono riportati i numeri di operai, robot e terne (2 operai +1 robot), necessari per produrre singolarmente un'unitá di ciascuno dei beni A, B, C e D. Nella tabella sono riportati anche i costi di manutenzione (per i robot), il salario (per un operaio) ed il costo globale di una terna, da minimizzare tenendo in considerazione che il numero totale di operai deve essere almeno 3 volte piú grande del numero di robot.

	A	B	C	D	costi
operai	8	15	4	4	8
robot	4	10	2	3	7
terne	3	6	0.5	1	20

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

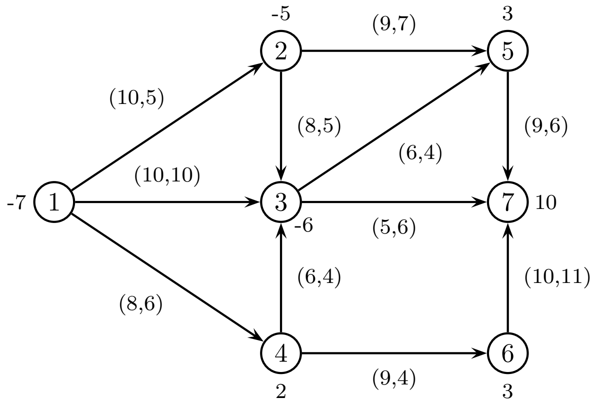
```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

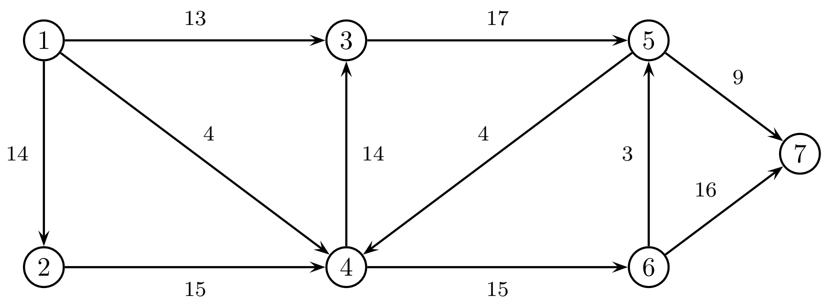


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x =$		
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

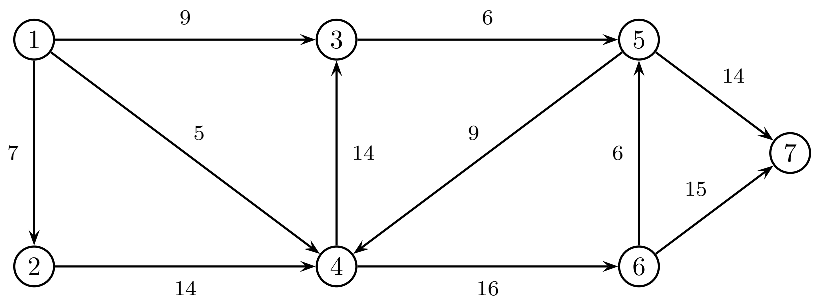
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	
Archi di U	(5,7)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max \ 13\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 9\ x_2 \le 53 \\ 13\ x_1 + 18\ x_2 \le 63 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	18	7	6	23	14	5	17
Volumi	125	194	151	74	68	36	403

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 1 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(-1,0)							
(0,1)							
(0,-1)							
(1,0)							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ -2\, x_1^2 + 10\, x_1\, x_2 + x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(0, 4)$, $(-5, 0)$, $(-4, -1)$ e $(2, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-2, \frac{1}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq -13 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3\ x_2 \leq -12 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\,2\}$	$x = (2,\ -8)$	SI	NO
$\{5,\,6\}$	$y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{33}{5},\ -\frac{26}{5}\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° iterazione	$\{3,\,5\}$	$(3,\ -5)$	$\left(0,\ 0,\ -\frac{26}{5},\ 0,\ \frac{7}{5},\ 0\right)$	3	$20,\ 5$	4
2° iterazione	$\{4,\,5\}$	$(4,\ -7)$	$\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{13}{2},\ -\frac{5}{2},\ 0\right)$	5	$5,\ 4$	2

Esercizio 3.

COMANDI DI MATLAB

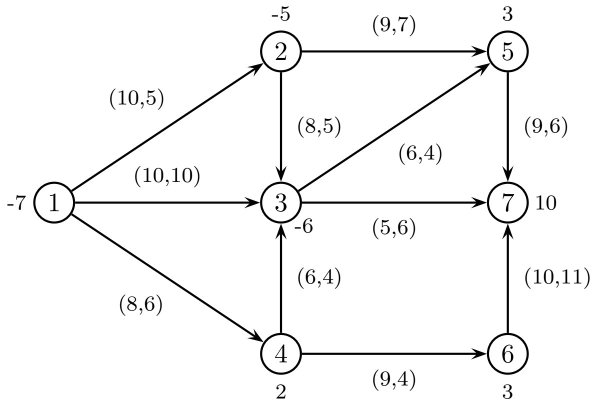
```
c=[ 8 ; 7 ; 20 ]                                              int=[ 1 ; 2 ; 3 ]

A=[-1/8 -1/4 -1/3;-1/15 -1/10 -1/6;-1/4 -1/2 -2;-1/4 -1/3 -1;-1 3 1]    Aeq=[]

b=[ -50 ; -25 ; -25 ; -55 ; 0]                                beq=[]

lb=[ 0 ; 0 ; 0 ]                                              ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

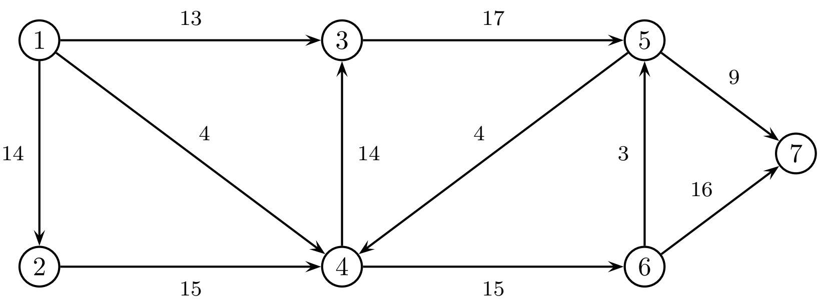


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7)	(2,3)	$x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$	NO	SI
(1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7)	(1,4)	$\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

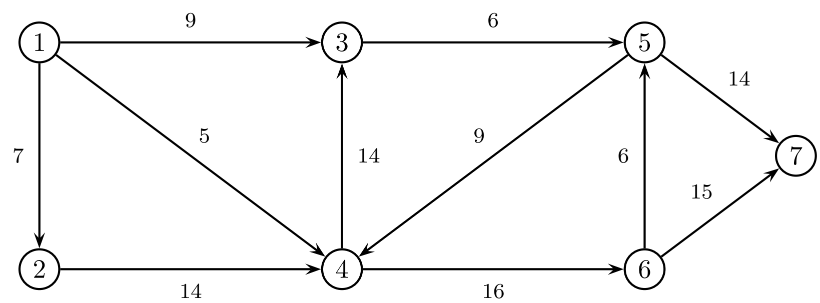
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)	(1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6)
Archi di U	(5,7)	(5,7)
x	(2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0)	(0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0)
π	(0, 10, 13, 8, 19, 17, 18)	(0, 7, 10, 8, 16, 17, 15)
Arco entrante	(1,3)	(5,7)
ϑ^+, ϑ^-	2 , 2	2 , 4
Arco uscente	(1,2)	(3,7)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		3		2		6		5		7	
nodo 2	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 3	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	30	3	30	3	22	6	22	6	22	6
nodo 6	$+\infty$	-1	19	4	19	4	19	4	19	4	19	4	19	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	35	6	31	5	31	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 5, 6		5, 6		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	6	(0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 4 - 6 - 7	5	(0, 6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 6, 0, 5)	11
1 - 2 - 4 - 6 - 7	7	(7, 6, 5, 7, 6, 0, 12, 0, 6, 0, 12)	18

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1,3\}$ $\quad N_t = \{2,4,5,6,7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 9\ x_2 \leq 53 \\ 13\ x_1 + 18\ x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{53}{18}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2,0)$ $\qquad v_I(P) = 26$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 2$

$r = 4$ $\qquad 5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 14$

Esercizio 8. Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	18	7	6	23	14	5	17
Volumi	125	194	151	74	68	36	403

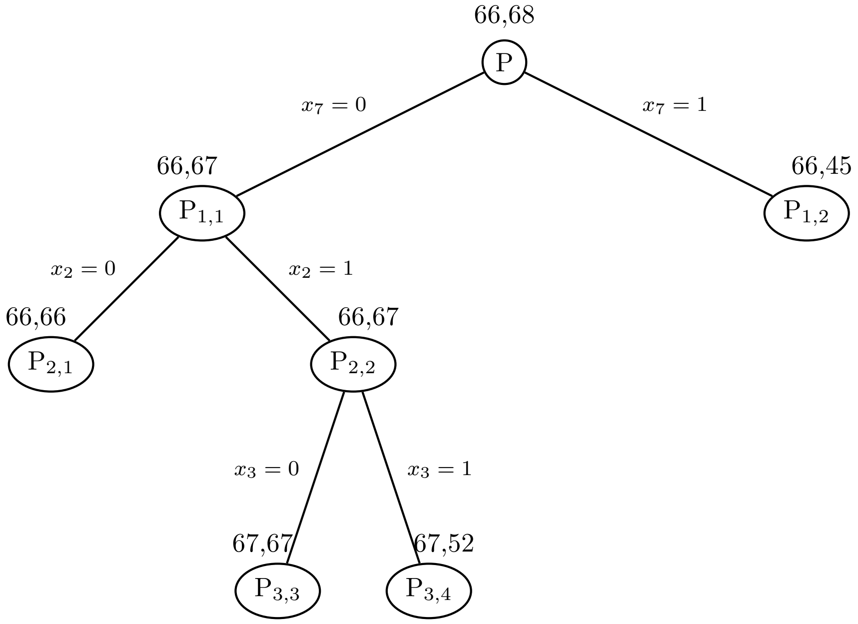
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1,0,1,1,1,1,0)$ $\qquad v_I(P) = 66$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1,0,0,1,1,1,\frac{200}{403}\right)$ $\qquad v_S(P) = 68$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.



soluzione ottima $= (1,1,0,1,1,1,0)$ $\qquad$ valore ottimo $= 67$

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1,x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 1 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-1,\ 0)$	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(0,\ 1)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(0,\ -1)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(1,\ 0)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -2\ x_1^2 + 10\ x_1\, x_2 + x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(0,4)$, $(-5,0)$, $(-4,-1)$ e $(2,3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-2, \frac{1}{3}\right)$	$(2, -3)$	$\begin{pmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{pmatrix}$	$\left(-\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}\right)$	$\frac{26}{3}$	$\frac{26}{3}$	$(-4, -1)$