Esame di Ricerca Operativa del 13/06/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 5\,y_1 - 5\,y_2 + 12\,y_3 + 4\,y_4 + 6\,y_5 - 7\,y_6 + 11\,y_7 \\ y_1 + y_2 + y_3 - 2\,y_4 - y_5 - y_6 = 1 \\ 2\,y_2 - y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = -6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1, 2\}$	$x =$		
$\{2, 4\}$	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{1,7}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'industria chimica produce una soluzione per la quale sono utilizzati 3 diversi composti chimici: C_1, C_2 e C_3. La composizione di ciascun composto e il costo unitario (Euro/Kg) sono indicati nella seguente tabella:

	% silicio	% calcio	% ferro	Costo
C_1	3	5	8	300
C_2	6	3	2	350
C_3	2	4	6	250

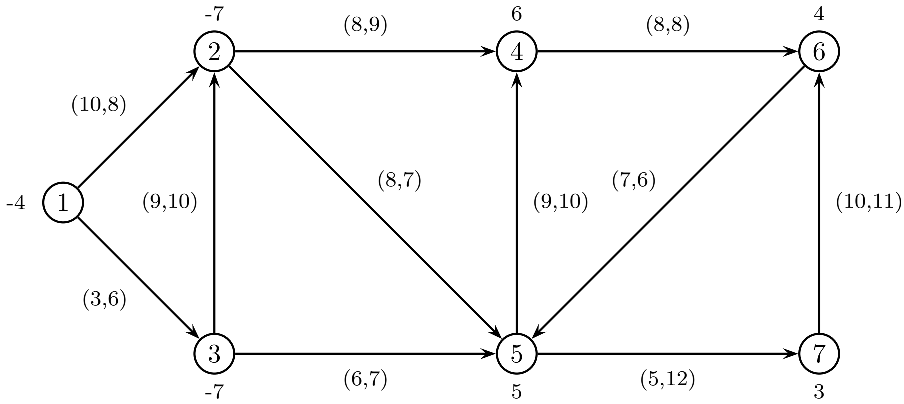
Il prodotto finale deve contenere una percentuale di silicio tra il 3 e l'8 %, una percentuale di calcio tra il 2 e il 7 % ed una percentuale di ferro non inferiore al 5 %. Determinare la composizione della soluzione che minimizza i costi.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intlinprog=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

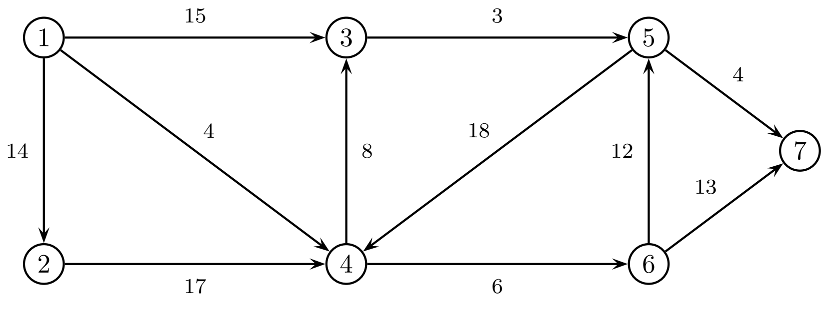


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,5) (4,6) (5,7) (7,6)	(2,4)	$x =$		
(1,2) (2,4) (3,2) (4,6) (5,7) (7,6)	(2,5)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

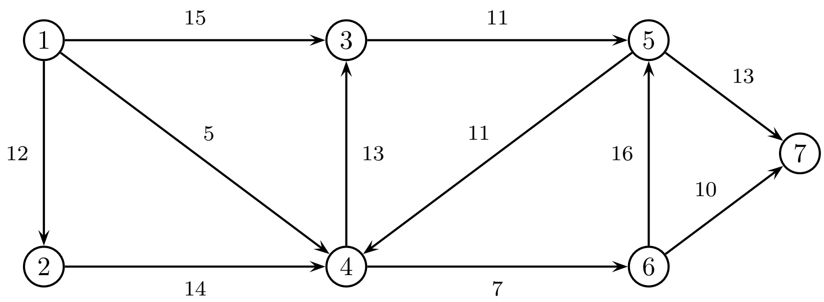
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 11\ x_2 \\ 16\ x_1 + 10\ x_2 \geq 55 \\ 15\ x_1 + 19\ x_2 \geq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		98	59	58
3			13	11
4				16

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero:	$v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo:	$v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 = 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(0,0)							
(3.2, 6.4)							
$(2, 3+\sqrt{13})$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 4\,x_1 + 9\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-4, 3)$, $(-3, -2)$, $(3, -3)$ e $(4, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{4}{3}, 3\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 5\ y_1 - 5\ y_2 + 12\ y_3 + 4\ y_4 + 6\ y_5 - 7\ y_6 + 11\ y_7 \\ y_1 + y_2 + y_3 - 2\ y_4 - y_5 - y_6 = 1 \\ 2\ y_2 - y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = -6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
$\{1,\ 2\}$	$x = (5,\ -5)$	SI	NO
$\{2,\ 4\}$	$y = \left(0,\ -\frac{13}{3},\ 0,\ -\frac{8}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	$\{1,\ 7\}$	$(5,\ -11)$	$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6)$	3	$1,\ 6$	1
2° iterazione	$\{3,\ 7\}$	$(1,\ -11)$	$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5)$	4	$\frac{5}{3}$	7

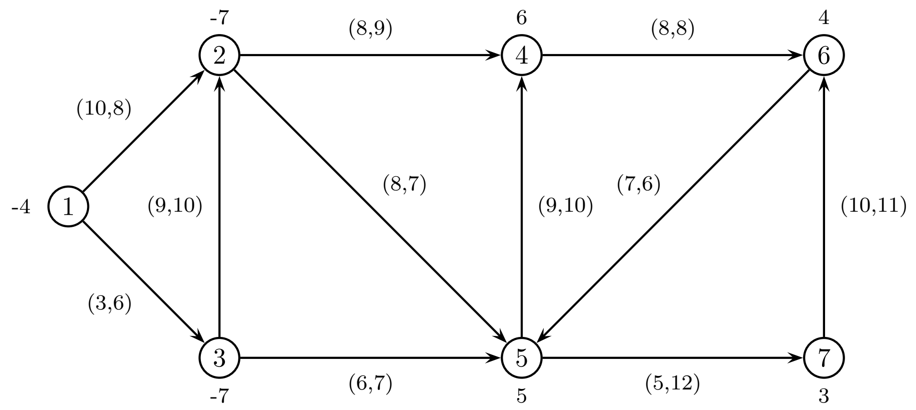
Esercizio 3. Indichiamo con x_1, x_2 ed x_3 rispettivamente, le quantità percentuali di composto di tipo 1 2 e 3 da usare nella soluzione. Il modello di programmazione lineare è il seguente:

$$\begin{cases} \min\ 300\ x_1 + 350\ x_2 + 250\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.03 \leq 0.03\ x_1 + 0.06\ x_2 + 0.02\ x_3 \leq 0.08 \\ 0.02 \leq 0.05\ x_1 + 0.03\ x_2 + 0.04\ x_3 \leq 0.07 \\ 0.08\ x_1 + 0.02\ x_2 + 0.06\ x_3 \geq 0.05 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=[300;350;250]

A=[-3,-6,-2;3,6,2;-5,-3,-4;5,3,4;-8,-2,-6]

b=[-3; 8; -2; 7; -5]

Aeq=[1;1;1]                                         beq=[1]

lb=[0;0;0]                                          ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

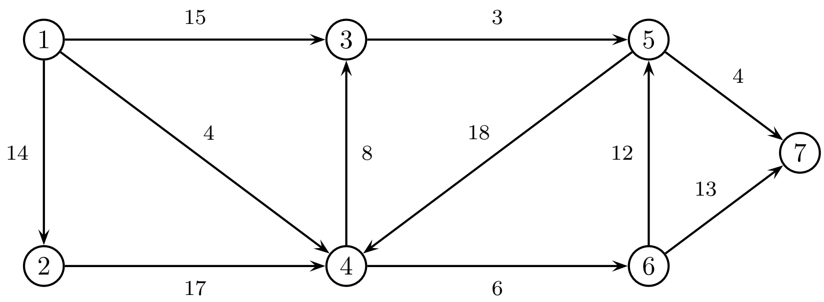


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,3) (2,5) (4,6) (5,7) (7,6)	(2,4)	$x = (11,\ -7,\ 9,\ 9,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 1)$	NO	NO
(1,2) (2,4) (3,2) (4,6) (5,7) (7,6)	(2,5)	$\pi = (0,\ 10,\ 1,\ 18,\ 11,\ 26,\ 16)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

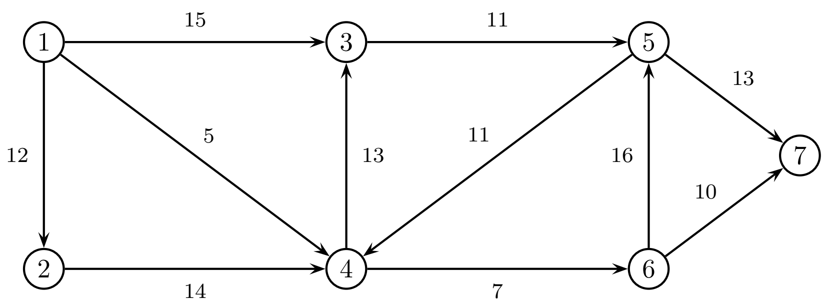
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6)	(1,2) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6)
Archi di U	(3,5)	(3,5)
x	(0, 4, 6, 5, 4, 7, 0, 0, 7, 0, 4)	(4, 0, 6, 5, 0, 7, 0, 0, 7, 0, 4)
π	(0, 12, 3, 20, 20, 35, 25)	(0, 10, 1, 18, 18, 33, 23)
Arco entrante	(1,2)	(4,6)
ϑ^+, ϑ^-	8 , 4	3 , 4
Arco uscente	(1,3)	(2,4)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		4		6		3		2		5		7	
nodo 2	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
nodo 3	15	1	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4	12	4
nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	22	6	15	3	15	3	15	3	15	3
nodo 6	$+\infty$	-1	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4	10	4
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	23	6	23	6	23	6	19	5	19	5
insieme Q	2, 3, 4		2, 3, 6		2, 3, 5, 7		2, 5, 7		5, 7		7		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 3 - 5 - 7	11	(0, 11, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 11, 0, 0)	11
1 - 4 - 6 - 7	5	(0, 11, 5, 0, 11, 0, 5, 0, 11, 0, 5)	16
1 - 2 - 4 - 6 - 7	2	(2, 11, 5, 2, 11, 0, 7, 0, 11, 0, 7)	18

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 11\ x_2 \\ 16\ x_1 + 10\ x_2 \geq 55 \\ 15\ x_1 + 19\ x_2 \geq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{68}{15}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 23$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 25$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 7\,x_1 + 9\,x_2 \geq 32$
$r = 3$ $\qquad 7\,x_1 + 9\,x_2 \geq 32$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	16	21	64	46
2		98	59	58
3			13	11
4				16

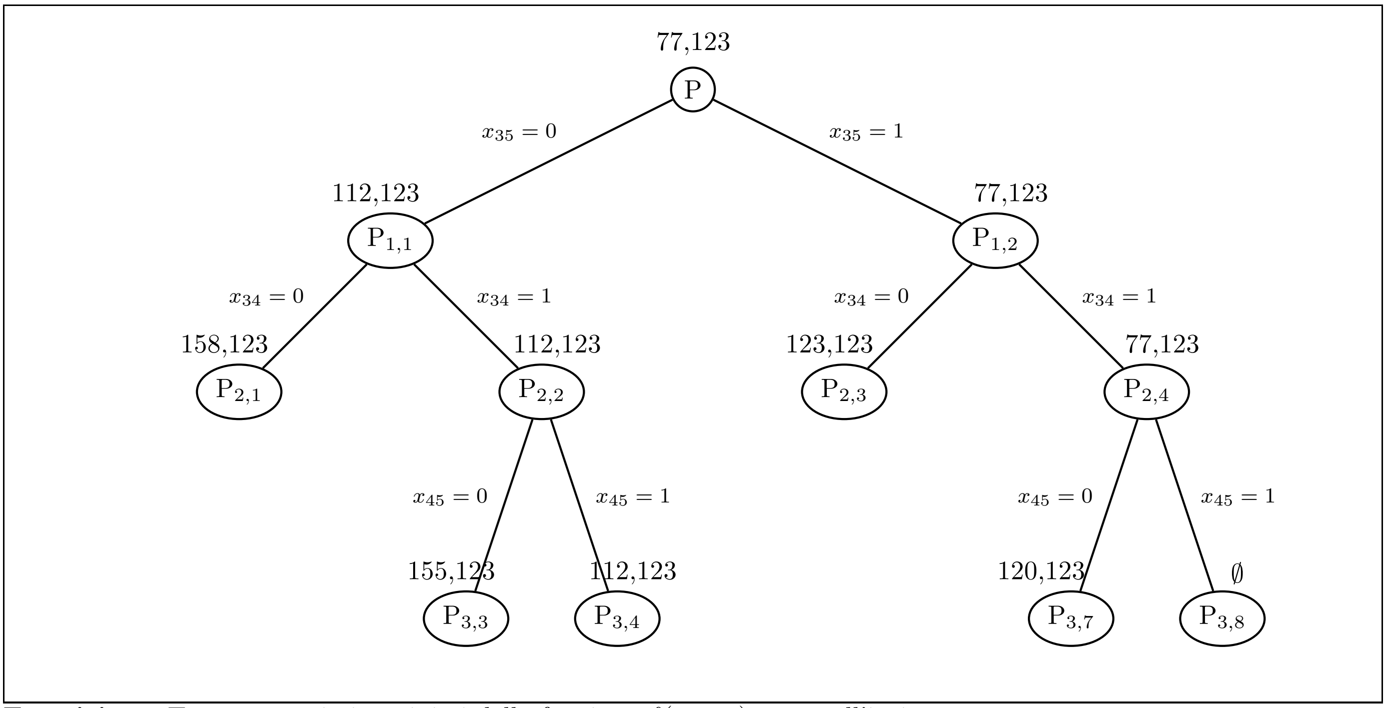
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: (1 , 2) (1 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 77$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 5 - 4 - 2 - 1$ $\qquad v_S(P) = 123$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}. Dire se l'algoritmo è terminato.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 = 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(0,0)	1/8	0	NO	NO	SI	SI	NO
(3.2 , 6.4)	3/40	-1/5	NO	NO	NO	SI	NO
$(2, 3+\sqrt{13})$	0	$-\sqrt{13}/26$	SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 + 4\, x_2^2 + 4\, x_1 + 9\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-4, 3)$, $(-3, -2)$, $(3, -3)$ e $(4, 3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{4}{3}, 3\right)$	$(0, 1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{56}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$(4, 3)$