Esame di Ricerca Operativa del 13/06/17

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 12\,y_1 + 5\,y_2 + 4\,y_3 + 6\,y_4 - 7\,y_5 - 5\,y_6 - y_7 \\ y_1 + y_2 - 2\,y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = 7 \\ -y_1 - y_3 - y_4 + y_5 + 2\,y_6 + y_7 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x =$		
{4, 6}	$y =$		

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2,7}					
2° iterazione						

Esercizio 3. Un'industria chimica produce una soluzione per la quale sono utilizzati 3 diversi composti chimici: C_1, C_2 e C_3. La composizione di ciascun composto e il costo unitario (Euro/Kg) sono indicati nella seguente tabella:

	% silicio	% calcio	% ferro	Costo
C_1	3	5	8	300
C_2	7	3	2	400
C_3	2	4	7	250

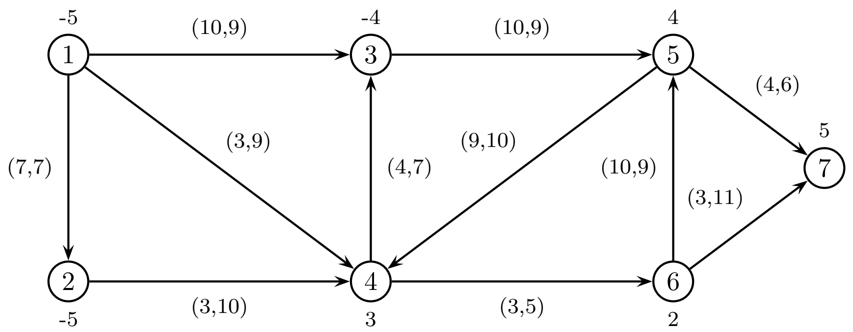
Il prodotto finale deve contenere una percentuale di silicio tra il 3 e l'8 %, una percentuale di calcio tra il 2 e il 7 % ed una percentuale di ferro non inferiore al 5 %. Determinare la composizione della soluzione che minimizza i costi.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intlinprog=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 4. Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

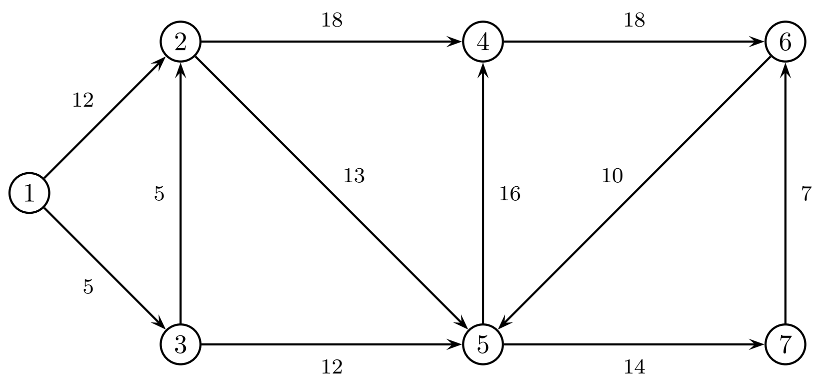


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(6,5)	$x =$		
(1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,4) (5,7)	(6,7)	$\pi = (0,$		

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

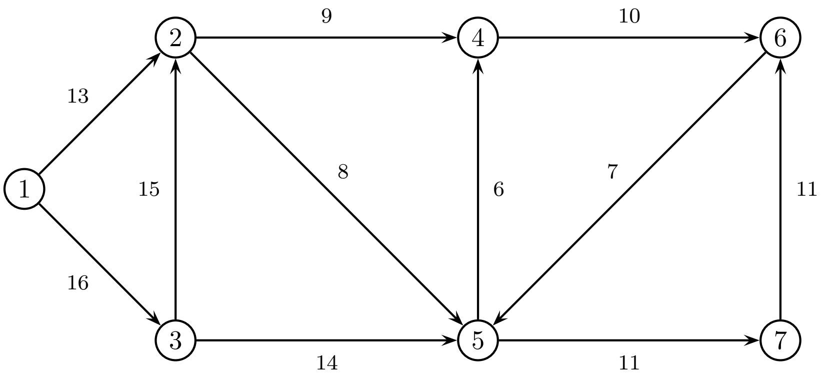
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5)	
Archi di U	(3,5)	
x		
π		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 8\ x_1 + 12\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 60 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	20	63	45
2		97	58	57
3			12	10
4				15

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}. Dire se l'algoritmo è terminato.

Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 = 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(0,0)							
(6.4, 3.2)							
$(3+\sqrt{13}, 2)$							

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 5\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-4,-5)$, $(0,5)$, $(-5,2)$ e $(2,4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_1 + 5\ y_2 + 4\ y_3 + 6\ y_4 - 7\ y_5 - 5\ y_6 - y_7 \\ y_1 + y_2 - 2\ y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = 7 \\ -y_1 - y_3 - y_4 + y_5 + 2\ y_6 + y_7 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Base	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
{1, 2}	$x = (5,\ -7)$	SI	NO
{4, 6}	$y = (0,\ 0,\ 0,\ -13,\ 0,\ -6,\ 0)$	NO	NO

Esercizio 2. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{2, 7}	$(5,\ 4)$	$(0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$	5	1	7
2° iterazione	{2, 5}	$(5,\ -2)$	$(0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$	6	$\frac{8}{3},\ \frac{1}{2}$	5

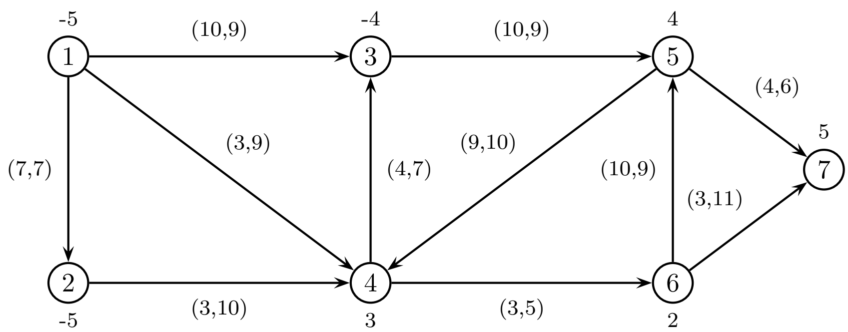
Esercizio 3. Indichiamo con x_1, x_2 ed x_3 rispettivamente, le quantità percentuali di composto di tipo 1 2 e 3 da usare nella soluzione. Il modello di programmazione lineare è il seguente:

$$\begin{cases} \min\ 300\ x_1 + 400\ x_2 + 250\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.03 \leq 0.03\ x_1 + 0.07\ x_2 + 0.02\ x_3 \leq 0.08 \\ 0.02 \leq 0.05\ x_1 + 0.03\ x_2 + 0.04\ x_3 \leq 0.07 \\ 0.08\ x_1 + 0.02\ x_2 + 0.07\ x_3 \geq 0.05 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=[300;400;250]

A=[-3,-7,-2;3,7,2;-5,-3,-4;5,3,4;-8,-2,-7]

b=[-3; 8; -2; 7; -5]

Aeq=[1;1;1]                                   beq=[1]

lb=[0;0;0]                                    ub=[]
```

Esercizio 4. Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

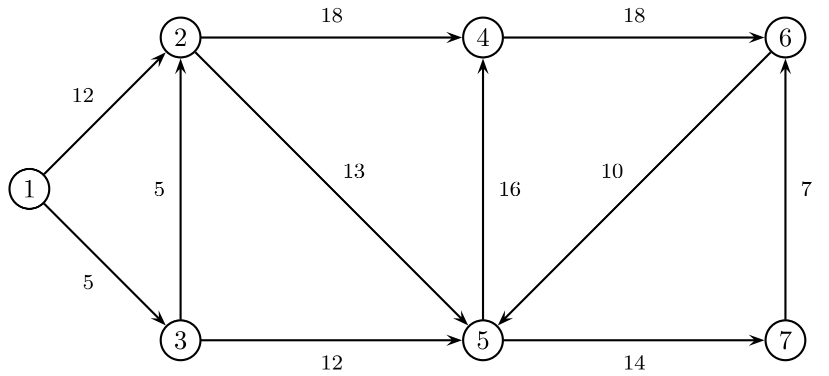


Archi di T	Archi di U	Soluzione di base	Ammissibile (si/no)	Degenere (si/no)
(1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)	(6,5)	$x = (-5,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ -4,\ 11,\ 0,\ 5,\ 9,\ 0)$	NO	SI
(1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,4) (5,7)	(6,7)	$\pi = (0,\ 7,\ 7,\ 3,\ -6,\ 6,\ -2)$	NO	NO

Esercizio 5. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

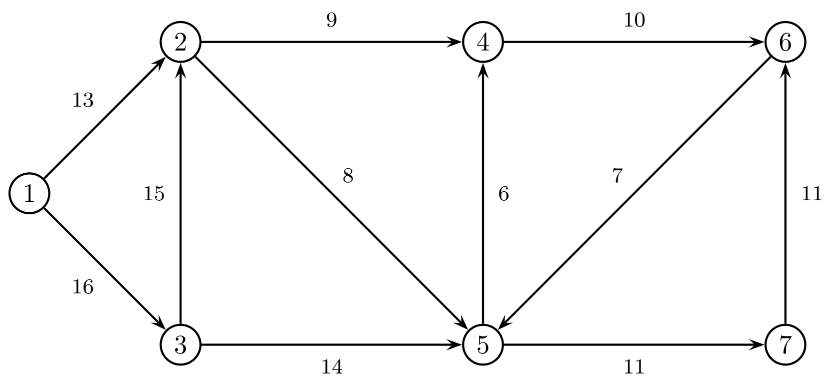
	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5)	(1,3) (1,4) (2,4) (3,5) (5,7) (6,5)
Archi di U	(3,5)	(4,6)
x	(0, 5, 0, 5, 9, 0, 2, 0, 5, 0, 0)	(0, 2, 3, 5, 6, 0, 5, 0, 5, 3, 0)
π	(0, 0, 10, 3, 16, 6, 20)	(0, 0, 10, 3, 20, 10, 24)
Arco entrante	(3,5)	(4,3)
ϑ^+, ϑ^-	3 , 5	6 , 2
Arco uscente	(4,6)	(1,3)

Esercizio 6. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		7		6	
nodo 2	12	1	10	3	10	3	10	3	10	3	10	3	10	3
nodo 3	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	28	2	28	2	28	2	28	2	28	2
nodo 5	$+\infty$	-1	17	3	17	3	17	3	17	3	17	3	17	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	46	4	38	7	38	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	31	5	31	5	31	5	31	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	8	(8, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0)	8
1 - 3 - 5 - 7	3	(8, 3, 0, 8, 0, 3, 0, 0, 11, 0, 0)	11

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 8\ x_1 + 12\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 60 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{51}{11}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 40$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 10\, x_1 + 12\, x_2 \geq 47$
$r = 3$ $\qquad 5\, x_1 + 6\, x_2 \geq 24$

Esercizio 8. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	15	20	63	45
2		97	58	57
3			12	10
4				15

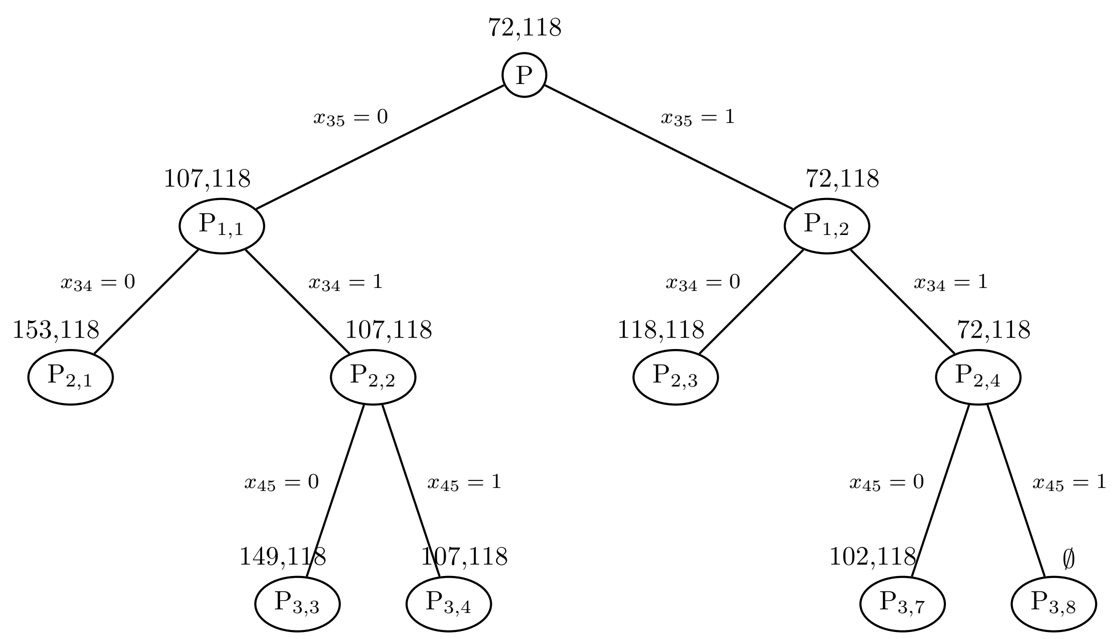
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: (1 , 2) (1 , 3) (3 , 4) (3 , 5) (4 , 5) $\qquad v_I(P) = 72$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 3 - 5 - 4$ $\qquad v_S(P) = 118$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{35}, x_{34}, x_{45}.



Esercizio 9. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 = 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
(0,0)	1/8	0	NO	NO	SI	SI	NO
(6.4,3.2)	3/40	-1/5	NO	NO	NO	SI	NO
$(3+\sqrt{13}, 2)$	0	$-\sqrt{13}/26$	SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 5\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-4,-5)$, $(0,5)$, $(-5,2)$ e $(2,4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$	$(1,2)$	$\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$	2	$\frac{1}{8}$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{37}{8}\right)$