Esame di Ricerca Operativa del 12/06/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale:

$$\begin{cases} \min\ 2\ y_1 + 2\ y_2 + 6\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 5\ y_6 \\ -2\ y_1 - 2\ y_2 - y_3 + 3\ y_4 + y_5 = 7 \\ y_1 - 3\ y_2 + 3\ y_3 + y_4 - y_5 + y_6 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	Degenere?	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° passo	{5,6}						
2° passo							

Esercizio 2. Un'azienda produce 4 tipi di smartphone (S1, S2, S3 e S4) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 tecnici in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 7 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre gli smartphone e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

Smartphone	S1	S2	S3	S4
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.2
Richiesta	200	140	120	80

Sapendo che i 4 tipi di smartphone vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti smartphone di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

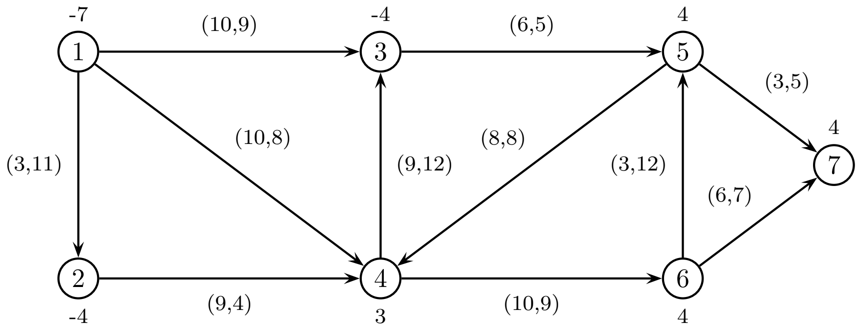
```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	
Archi di U	(2,4)	
x		
degenere?		
π		
degenere?		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 46 \\ 7\ x_1 + 9\ x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

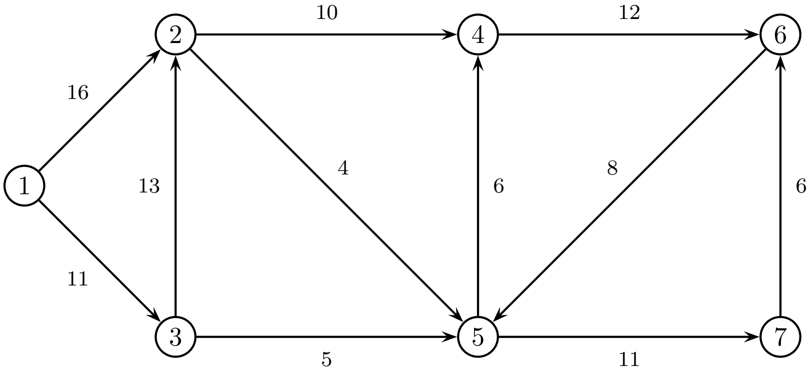
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

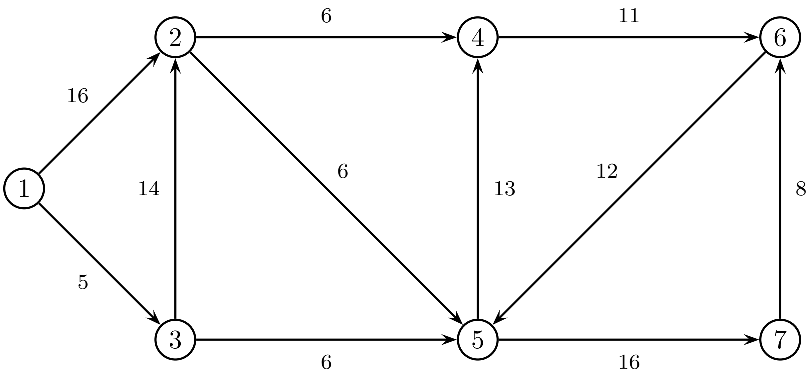
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{14}, x_{24}, x_{45}. Dire se l'algoritmo é terminato.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2^2 + 8x_2 + 15 \leq 0, \quad x_1^2 + 8x_1 + 15 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-5,\ -3)$							
$(-3,\ -3)$							
$(-5,\ -5)$							
$(-3,\ -5)$							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 6\, x_1^2 - 4\, x_1 x_2 - 2\, x_2^2 + 5\, x_1 - 2\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(1,5)$, $(5,0)$, $(-3,5)$ e $(-1,0)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{5}{3}, 5\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale .

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{5, 6}	(9, 5) (SI)	(0, 0, 0, 0, 7, 11)	4	$\frac{7}{3}, \frac{11}{4}$	5
2° iterazione	{4, 6}	$\left(\frac{7}{3}, 5\right)$ (NO)	$\left(0, 0, 0, \frac{7}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$	3	$\frac{1}{2}$	6

Esercizio 2. variabili decisionali: x_{ij} = numero di smartphone di tipo i prodotti nello stabilimento j, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A}+x_{1B}) + 600\,(x_{2A}+x_{2B}) + 1000\,(x_{3A}+x_{3B}) + 1500\,(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \le 1400 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.2\,x_{4B} \le 1750 \\ x_{1A}+x_{1B} \ge 200 \\ x_{2A}+x_{2B} \ge 140 \\ x_{3A}+x_{3B} \ge 120 \\ x_{4A}+x_{4B} \ge 80 \\ x_{ij} \ge 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 3.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (4,6) (5,7) (6,7)
Archi di U	(2,4)	(2,4) (3,5)
x	(0, 0, 7, 4, 4, 0, 8, 0, 0, 0, 4) (SI)	(0, 1, 6, 4, 5, 0, 7, 0, 1, 0, 3) (SI)
π	(0, 3, 17, 10, 23, 20, 26) (SI)	(0, 3, 10, 10, 23, 20, 26) (SI)
Arco entrante	(1,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	1 , 4	2 , 0
Arco uscente	(3,5)	(1,2)

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 7\,x_1 + 14\,x_2 \\ 11\,x_1 + 6\,x_2 \le 46 \\ 7\,x_1 + 9\,x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{50}{9}\right)$ $v_S(P) = 77$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

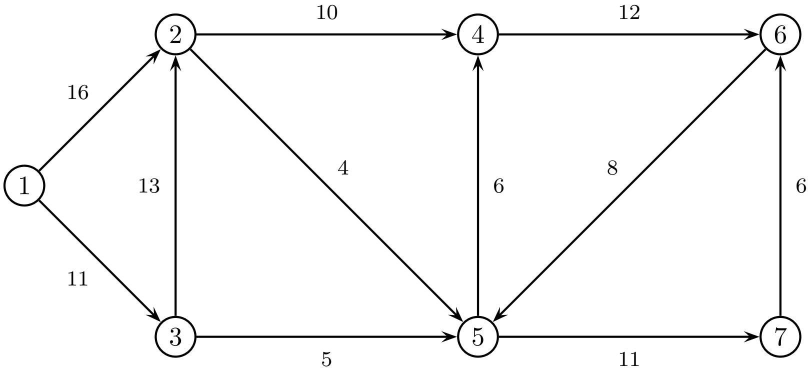
sol. ammissibile = $(0, 5)$ $v_I(P) = 70$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $x_2 \le 5$

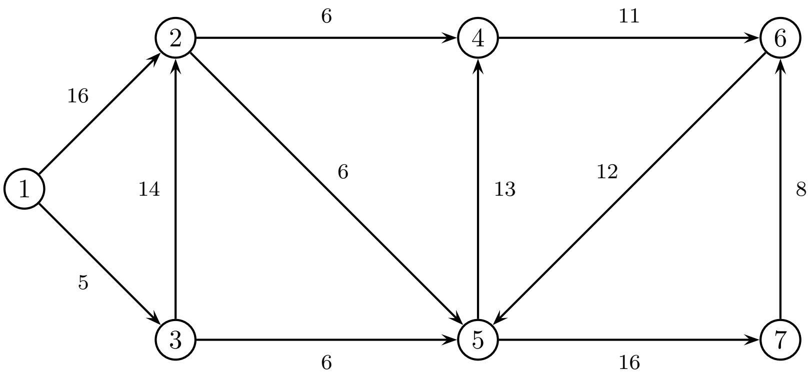
$r = 3$ $2\,x_1 + 3\,x_2 \le 16$

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		7		6	
nodo 2	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1
nodo 3	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1	11	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	22	5	22	5	22	5	22	5
nodo 5	$+\infty$	-1	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3	16	3
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	34	4	33	7	33	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	27	5	27	5	27	5	27	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 3 - 5 - 7	5	(6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 0, 11, 0, 0)	11
1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	5	(11, 5, 5, 6, 0, 5, 5, 0, 16, 5, 0)	16

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

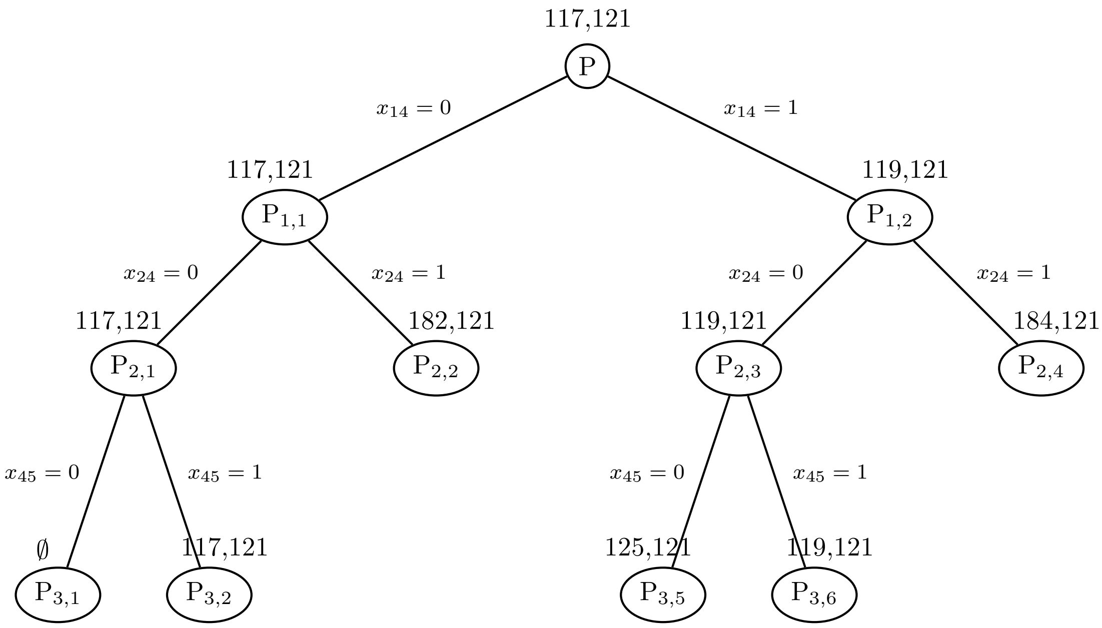
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 5) (4 , 5) $v_I(P) = 117$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 – 5 – 3 – 2 – 1 $v_S(P) = 121$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{14}, x_{24}, x_{45}.



Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2^2 + 8x_2 + 15 \leq 0, \quad x_1^2 + 8x_1 + 15 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-5, \; -3)$	$(3, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(-3, \; -3)$	$(3, -2)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-5, \; -5)$	$(-5, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-3, \; -5)$	$(-5, -2)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 6\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 + 5\, x_1 - 2\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(1, 5)$, $(5, 0)$, $(-3, 5)$ e $(-1, 0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{5}{3}, 5\right)$	$(0, 1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(35, 0)$	$\dfrac{8}{105}$ $(\frac{8}{3})$	$\dfrac{8}{105}$ $(\frac{8}{3})$	$(1, 5)$