Esame di Ricerca Operativa del 12/06/18

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min\ 6\ y_1 + 2\ y_2 + 12\ y_3 + 4\ y_4 + 2\ y_5 + 14\ y_6 \\ -y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 + y_4 - 2\ y_5 + y_6 = 9 \\ 3\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - 3\ y_5 - 2\ y_6 = -5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	x	Degenere?	y	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° passo	{1,6}						
2° passo							

Esercizio 2. Un'azienda produce 4 tipi di smartphone (S1, S2, S3 e S4) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 tecnici in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 6 ore al giorno per 6 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre gli smartphone e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

Smartphone	S1	S2	S3	S4
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.1
Richiesta	200	140	120	80

Sapendo che i 4 tipi di smartphone vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti smartphone di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

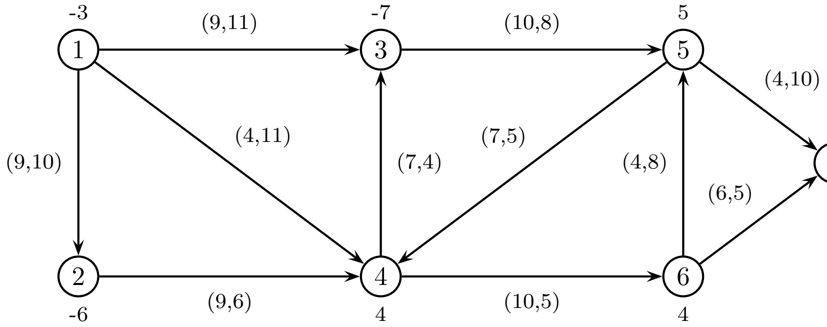
```
c=                intcon=

A=                b=

Aeq=              beq=

lb=               ub=
```

Esercizio 3. Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,4)	
x		
degenere?		
π		
degenere?		
Arco entrante		
ϑ^+, ϑ^-		
Arco uscente		

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 14\ x_1 + 12\ x_2 \leq 67 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

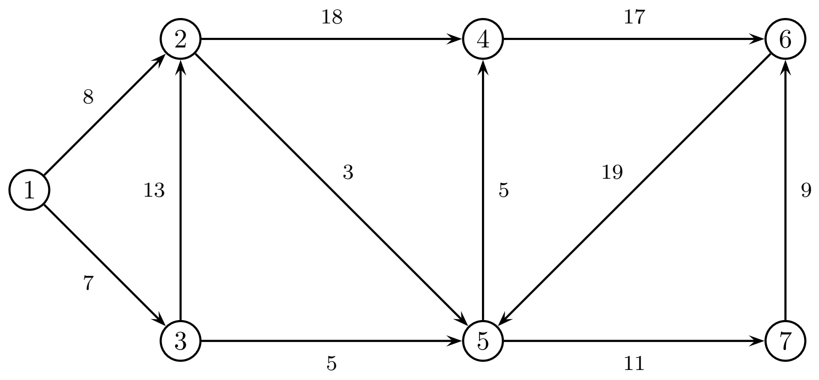
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

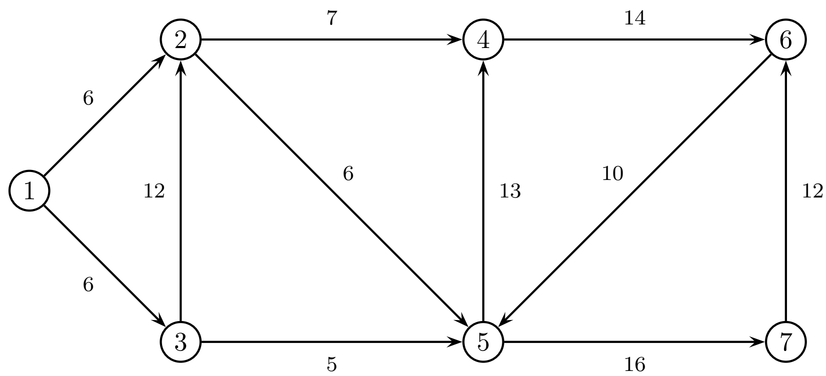
$r =$	taglio:

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme Q														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando 1–alberi di costo minimo.

1–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando 1–alberi di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{14}, x_{24}, x_{45}. Dire se l'algoritmo é terminato.

Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2^2 + 6x_2 + 8 \le 0, \quad x_1^2 + 6x_1 + 8 \le 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-2,\ -2)$							
$(-4,\ -2)$							
$(-2,\ -4)$							
$(-4,\ -4)$							

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 5\,x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di P sono $(-5,3)$, $(4,4)$, $(-4,-4)$ e $(3,0)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{13}{3}, -\frac{5}{3}\right)$						

SOLUZIONI

Esercizio 1.

	Base	x	y	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{1, 6}	(54, 20) (NO)	(13, 0, 0, 0, 0, 22)	3	$\frac{13}{7}, \frac{11}{5}$	1
2° iterazione	{3, 6}	$\left(\frac{38}{7}, -\frac{30}{7}\right)$ (SI)	$\left(0, 0, \frac{13}{7}, 0, 0, \frac{24}{7}\right)$	4	13, 6	6

Esercizio 2.
variabili decisionali: x_{ij} = numero di smartphone di tipo i prodotti nello stabilimento j, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A}+x_{1B}) + 600\,(x_{2A}+x_{2B}) + 1000\,(x_{3A}+x_{3B}) + 1500\,(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \leq 1440 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \leq 1800 \\ x_{1A} + x_{1B} \geq 200 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 140 \\ x_{3A} + x_{3B} \geq 120 \\ x_{4A} + x_{4B} \geq 80 \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 3.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
x	(0, 0, 3, 6, 8, 1, 4, 0, 3, 0, 0) (SI)	(0, 1, 2, 6, 8, 0, 4, 0, 3, 0, 0) (SI)
π	(0, 9, 11, 4, 21, 14, 25) (NO)	(0, 9, 9, 4, 19, 14, 23) (NO)
Arco entrante	(1,3)	(2,4)
ϑ^+, ϑ^-	11 , 1	9 , 0
Arco uscente	(4,3)	(1,2)

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 14\ x_1 + 12\ x_2 \leq 67 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{67}{14}, 0\right)$ $\quad v_S(P) = 57$

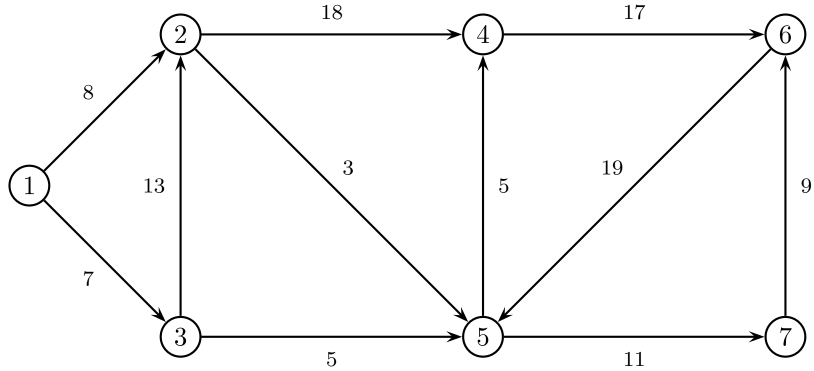
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile = $(4, 0)$ $\quad v_I(P) = 48$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

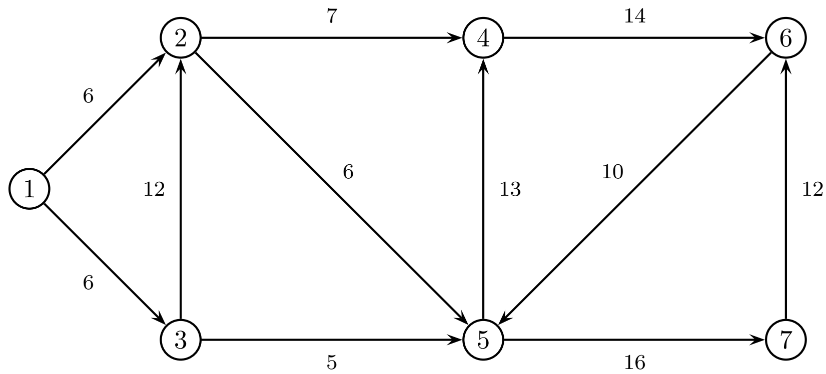
$r = 1$ $\quad x_1 \leq 4$
$r = 4$ $\quad 4\,x_1 + 3\,x_2 \leq 19$

Esercizio 5. a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
nodo visitato	1		3		2		5		4		7		6	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	16	5	16	5	16	5	16	5
nodo 5	$+\infty$	-1	12	3	11	2	11	2	11	2	11	2	11	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	33	4	31	7	31	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	22	5	22	5	22	5	22	5
insieme Q	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	δ	x	v
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 3 - 5 - 7	5	(6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 0, 11, 0, 0)	11
1 - 3 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	1	(6, 6, 1, 6, 1, 5, 1, 0, 12, 1, 0)	12

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1\}$ $\quad N_t = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Esercizio 6. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

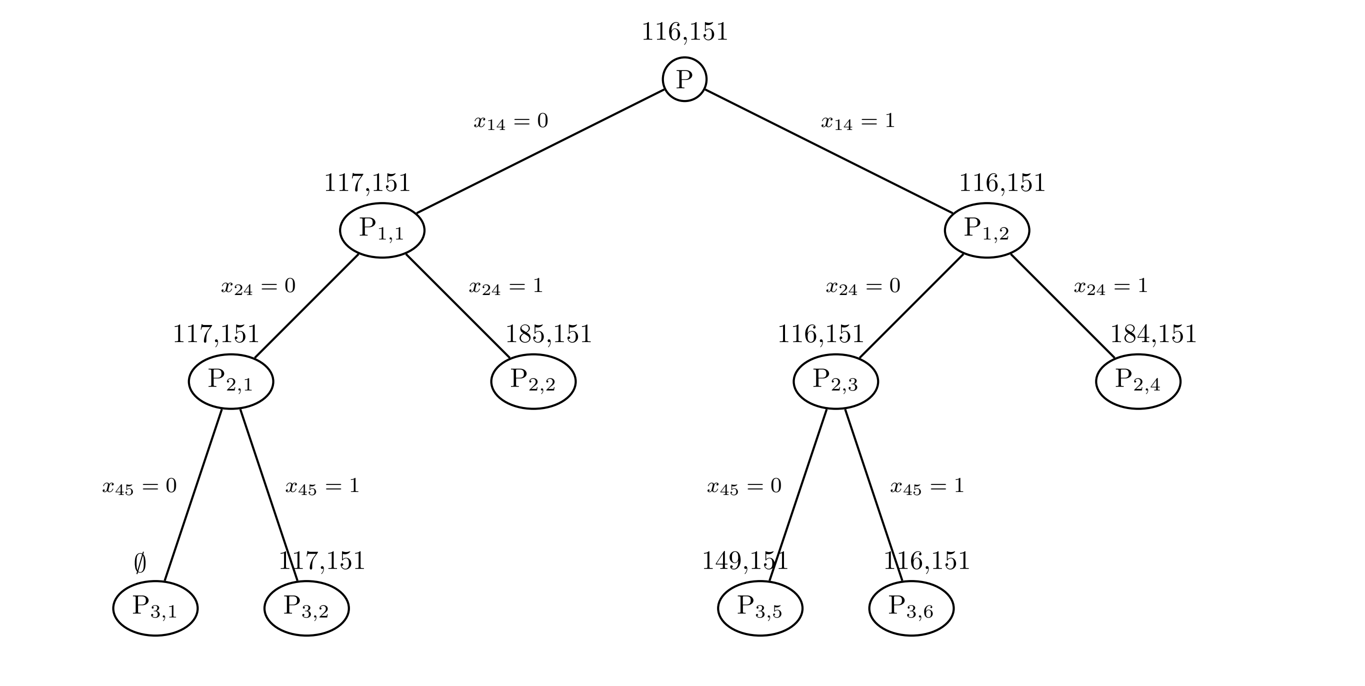
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando 1–alberi di costo minimo.

1–albero: (1 , 3) (1 , 4) (2 , 3) (3 , 5) (4 , 5)	$v_I(P) = 116$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: 5 – 4 – 1 – 3 – 2	$v_S(P) = 151$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando 1–alberi di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{14}, x_{24}, x_{45}.



Esercizio 7. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad x_1^2 + 6x_1 + 8 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
x	λ	μ	globale	locale	globale	locale	
$(-2, \; -2)$	$(2, 0)$		NO	NO	SI	SI	NO
$(-4, \; -2)$	$(2, -2)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-2, \; -4)$	$(-4, 0)$		NO	NO	NO	NO	SI
$(-4, \; -4)$	$(-4, -2)$		SI	SI	NO	NO	NO

Esercizio 8. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4 \; x_1 \, x_2 - 4 \; x_2^2 + 5 \; x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P è il poliedro di vertici $(-5, 3)$, $(4, 4)$, $(-4, -4)$ e $(3, 0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{13}{3}, -\frac{5}{3}\right)$	$(-7, -1)$	$\begin{pmatrix} 1/50 & -7/50 \\ -7/50 & 49/50 \end{pmatrix}$	$\left(\dfrac{21}{5}, -\dfrac{147}{5}\right)$ (1,-7)	$\dfrac{5}{63}$ $(\dfrac{1}{3})$	$\dfrac{5}{63}$ $(\dfrac{1}{3}$)	$(-4, -4)$