

(Cognome)

(Nome)

(Numero di Matricola)

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min & 6 y_1 + 2 y_2 + 12 y_3 + 4 y_4 + 2 y_5 + 14 y_6 \\ & -y_1 - 2 y_2 + 3 y_3 + y_4 - 2 y_5 + y_6 = 9 \\ & 3 y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - 3 y_5 - 2 y_6 = -5 \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

	Base	$x$	Degenerare?	$y$	Indice uscente	Rapporti	Indice entrante
1° passo	{1,6}						
2° passo							

**Esercizio 2.** Un'azienda produce 4 tipi di smartphone (S1, S2, S3 e S4) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 tecnici in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 6 ore al giorno per 6 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre gli smartphone e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

Smartphone	S1	S2	S3	S4
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.1
Richiesta	200	140	120	80

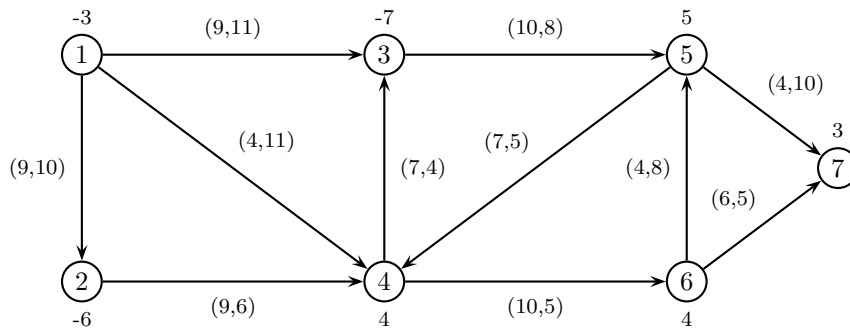
Sapendo che i 4 tipi di smartphone vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti smartphone di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:  
modello:

COMANDI DI MATLAB

c=	intcon=
A=	b=
Aeq=	beq=
lb=	ub=

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).



	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	
Archi di U	(2,4)	
$x$		
degenere?		
$\pi$		
degenere?		
Arco entrante		
$\vartheta^+, \vartheta^-$		
Arco uscente		

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max & 12x_1 + 7x_2 \\ & 14x_1 + 12x_2 \leq 67 \\ & 6x_1 + 17x_2 \leq 54 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento =  $v_S(P) =$

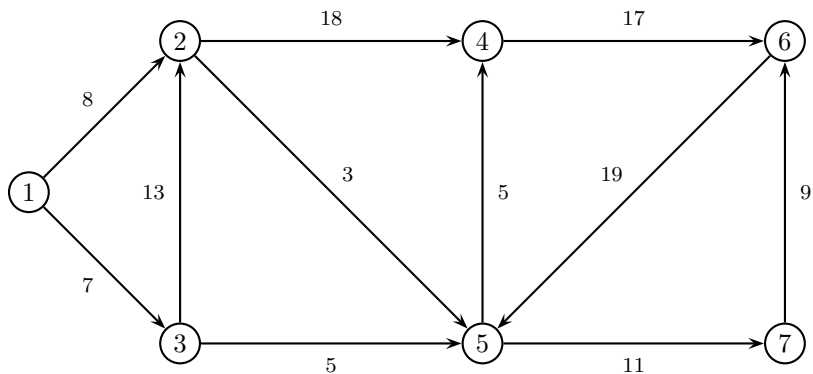
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile =  $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

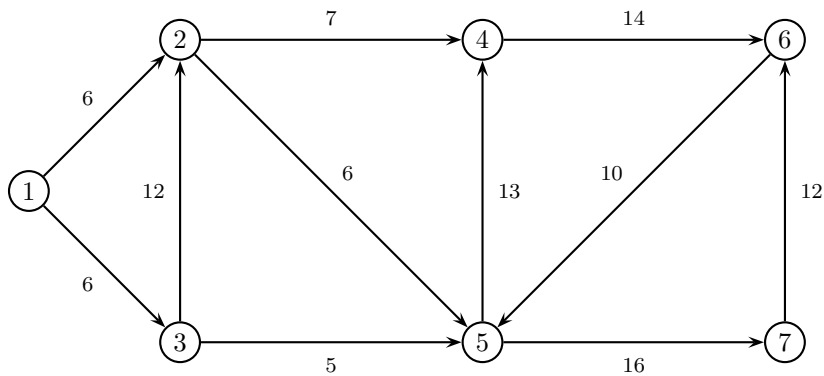
$r =$  taglio:

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$
nodo visitato														
nodo 2														
nodo 3														
nodo 4														
nodo 5														
nodo 6														
nodo 7														
insieme $Q$														

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	$\delta$	$x$	$v$

Taglio di capacità minima:  $N_s =$

$N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando 1-alberi di costo minimo.

1-albero:  $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo:  $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando 1-alberi di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{14}$ ,  $x_{24}$ ,  $x_{45}$ . Dire se l'algoritmo é terminato.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1$  sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 + 6x_2 + 8 \leq 0, \quad x_1^2 + 6x_1 + 8 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
$x$	$\lambda$	$\mu$	globale	locale	globale	locale	
$(-2, -2)$							
$(-4, -2)$							
$(-2, -4)$							
$(-4, -4)$							

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min & -4x_1x_2 - 4x_2^2 + 5x_1 + x_2 \\ & x \in P \end{cases}$$

e i vertici di  $P$  sono  $(-5, 3)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(-4, -4)$  e  $(3, 0)$ . Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice $M$	Matrice $H$	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(-\frac{13}{3}, -\frac{5}{3}\right)$						

# SOLUZIONI

## Esercizio 1.

	Base	$x$	$y$	Indice entrante	Rapporti	Indice uscente
1° iterazione	{1, 6}	(54, 20) (NO)	(13, 0, 0, 0, 0, 22)	3	$\frac{13}{7}, \frac{11}{5}$	1
2° iterazione	{3, 6}	$\left(\frac{38}{7}, -\frac{30}{7}\right)$ (SI)	$\left(0, 0, \frac{13}{7}, 0, 0, \frac{24}{7}\right)$	4	13, 6	6

## Esercizio 2.

variabili decisionali:  $x_{ij}$  = numero di smartphone di tipo  $i$  prodotti nello stabilimento  $j$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $j = A, B$ .

modello:

$$\begin{cases} \max 400(x_{1A} + x_{1B}) + 600(x_{2A} + x_{2B}) + 1000(x_{3A} + x_{3B}) + 1500(x_{4A} + x_{4B}) \\ 1.2x_{1A} + 1.5x_{2A} + 1.7x_{3A} + 2x_{4A} \leq 1440 \\ 1.5x_{1B} + 1.6x_{2B} + 1.8x_{3B} + 2.1x_{4B} \leq 1800 \\ x_{1A} + x_{1B} \geq 200 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 140 \\ x_{3A} + x_{3B} \geq 120 \\ x_{4A} + x_{4B} \geq 80 \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

## Esercizio 3.

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,4) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)
Archi di U	(2,4)	(2,4)
$x$	(0, 0, 3, 6, 8, 1, 4, 0, 3, 0, 0) (SI)	(0, 1, 2, 6, 8, 0, 4, 0, 3, 0, 0) (SI)
$\pi$	(0, 9, 11, 4, 21, 14, 25) (NO)	(0, 9, 9, 4, 19, 14, 23) (NO)
Arco entrante	(1,3)	(2,4)
$\vartheta^+, \vartheta^-$	11, 1	9, 0
Arco uscente	(4,3)	(1,2)

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max 12x_1 + 7x_2 \\ 14x_1 + 12x_2 \leq 67 \\ 6x_1 + 17x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{67}{14}, 0\right)$	$v_S(P) = 57$
--	---------------

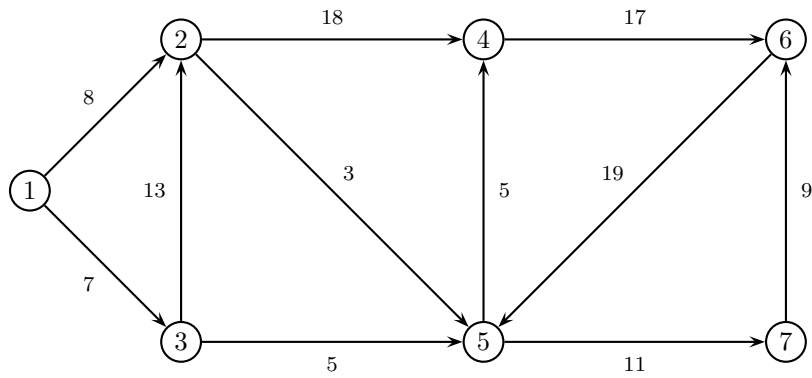
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile = (4, 0)	$v_I(P) = 48$
---------------------------	---------------

c) Calcolare un taglio di Gomory.

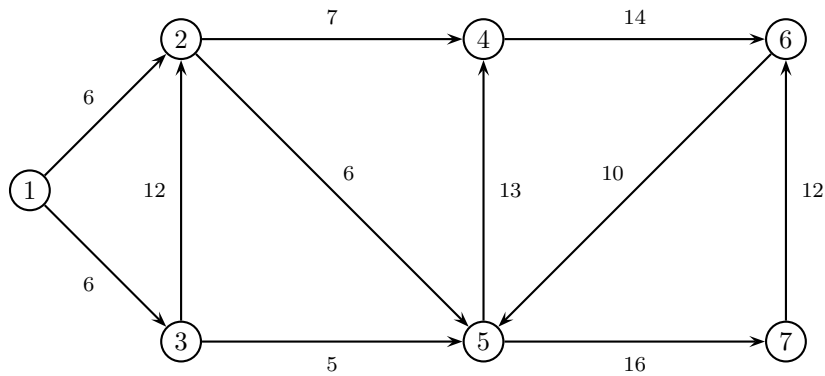
$r = 1$ $r = 4$	$x_1 \leq 4$ $4x_1 + 3x_2 \leq 19$
--------------------	---------------------------------------

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



	iter 1		iter 2		iter 3		iter 4		iter 5		iter 6		iter 7	
	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$	$\pi$	$p$
nodo visitato	1		3		2		5		4		7		6	
nodo 2	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
nodo 3	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
nodo 4	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	16	5	16	5	16	5	16	5
nodo 5	$+\infty$	-1	12	3	11	2	11	2	11	2	11	2	11	2
nodo 6	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	33	4	31	7	31	7
nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	22	5	22	5	22	5	22	5
insieme $Q$	2, 3		2, 5		4, 5		4, 7		6, 7		6		$\emptyset$	

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



cammino aumentante	$\delta$	$x$	$v$
1 - 2 - 5 - 7	6	(6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0)	6
1 - 3 - 5 - 7	5	(6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 0, 11, 0, 0)	11
1 - 3 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7	1	(6, 6, 1, 6, 1, 5, 1, 0, 12, 1, 0)	12

Taglio di capacità minima:  $N_s = \{1\}$      $N_t = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

città	2	3	4	5
1	29	24	28	47
2		18	94	61
3			53	26
4				20

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando 1-alberi di costo minimo.

1-albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 4 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 )

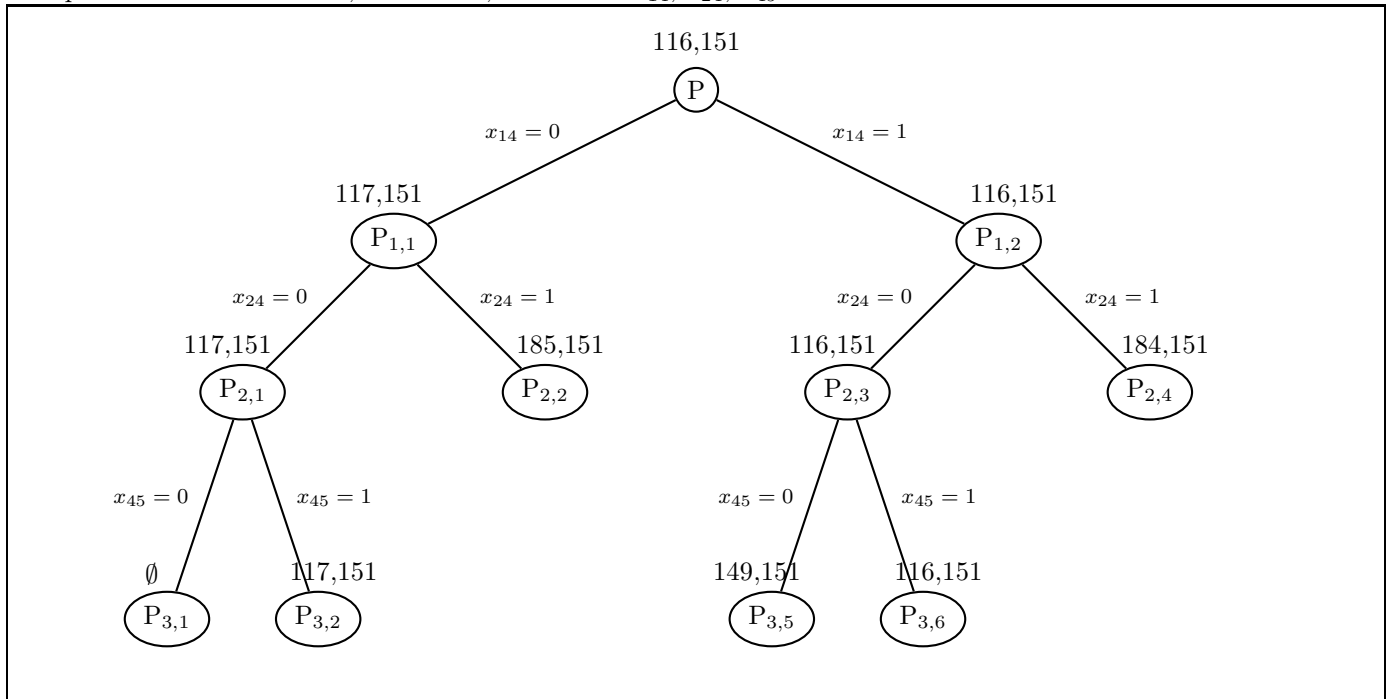
$$v_I(P) = 116$$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: 5 - 4 - 1 - 3 - 2

$$v_S(P) = 151$$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando 1-alberi di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili  $x_{14}, x_{24}, x_{45}$ .



**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1$  sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 + 6x_2 + 8 \leq 0, \quad x_1^2 + 6x_1 + 8 \leq 0\}.$$

Soluzioni del sistema LKT			Massimo		Minimo		Sella
$x$	$\lambda$	$\mu$	globale	locale	globale	locale	
(-2, -2)	(2, 0)		NO	NO	SI	SI	NO
(-4, -2)	(2, -2)		NO	NO	NO	NO	SI
(-2, -4)	(-4, 0)		NO	NO	NO	NO	SI
(-4, -4)	(-4, -2)		SI	SI	NO	NO	NO

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min & -4 x_1 x_2 - 4 x_2^2 + 5 x_1 + x_2 \\ & x \in P \end{cases}$$

dove  $P$  è il poliedro di vertici  $(-5, 3)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(-4, -4)$  e  $(3, 0)$ . Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

Punto	Matrice $M$	Matrice $H$	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$(-\frac{13}{3}, -\frac{5}{3})$	$(-7, -1)$	$\begin{pmatrix} 1/50 & -7/50 \\ -7/50 & 49/50 \end{pmatrix}$	$(\frac{21}{5}, -\frac{147}{5}) (1, -7)$	$\frac{5}{63} (\frac{1}{3})$	$\frac{5}{63} (\frac{1}{3})$	$(-4, -4)$